1. **Explicação da percela** ${}^6C_4 \times 2 \times 4!$

Existem ${}^6C_4$ maneiras de escolher quatro das seis cores disponíveis para pintar as faces da pirâmide com quatro cores; para cada uma dessas maneiras, existem duas maneiras de escolher as duas faces opostas que têm de ser pintadas com a mesma cor e, para cada uma destas escolhas, existem $4!$ maneiras de pintar as faces da pirâmide usando as quatro cores escolhidas.

Explicação da parcela ${}^6A_5$

Existem ${}^6A_5$ maneiras de pintar as faces da pirêmide com cinco das seis cores, permutando as cores pelas faces.

Exame 2025, 2.ª fase

2. Para que um número de seis algarismos seja inferior a 300 000, o algarismo das centenas de milhar tem de ser 1 ou 2. Para que o número seja par, o algarismo das unidades pode ser 2, 4 ou 6. Como os algarismos 2 e 4 têm que estar ao lado um do outro então o número termina com 24, 42 ou _6. Como os algarismos são todos diferentes, tem-se:

Números que começam com o algarismo 2:

Então temos $\boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{6}$, logo temos $3! = 6$, possibilidades.

Números que começam com o algarismo 1 e terminam com o 6:

Então temos,

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{6}$

ou

$\boxed{1}\ \boxed{}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{}\ \boxed{6}$

ou

$\boxed{1}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{6}$

ou pela ordem inversa, e os restantes números 3 e 5 ocupam os restantes lugares, 2!

$3 \times 2 \times 2! = 12$

eduardo.pinhao@matematicaparatodos.pt

Números que começam com o algarismo 1 e terminam com o 4 ou 2:

Então temos,

$\boxed{1}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{4}\ \boxed{2}$

ou

$\boxed{1}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{2}\ \boxed{4}$

Os restantes números, 3 , 5 e 6, ocupam os restantes lugares $3!$

$2\times 3! = 12$

Portanto a quantidade de números que são possíveis nas condições enunciadas são:

$6+12+12=30$

Exame 2024, 2.ª fase

3. Sabendo que os três contrabaixistas se dispõem numa única fila; havendo só duas filas, há duas formas de se escolher a fila.
${}^4A_3$ Corresponde às diferentes formas de distribuir os três contrabaixistas pelos 4 lugares da fila escolhida.

Quanto aos restantes músicos, estes permutam-se pelos lugares ainda existentes, ou seja, $5!$.

Assim, a expressão correspondente ao número de maneiras diferentes de dispor os oito músicos, ficando os três contrabaixistas numa fila é:

$$2\times {}^4A_3 \times 5!$$

OPÇÃO: B

Exame 2024, 1.ª fase

4. Temos 6 posições para colocar o número os dois algarismos 5: ${}^6C_2 = 15$

Sobram 4 posições para colocar os restantes algarismos, como pode haver repetição: ${}^8A'_4 = 8^4 = 4096$

Assim, $15\times 4096 = 61440$

OPÇÃO: B

Exame 2023, 2.ª fase

5. Como os 3 amigos têm que ficar juntos e existem dez lugares disponíveis, temos $10 - 3 + 1 = 8$ posições onde podem ficar os três amigos juntos.
Como eles podem trocar de posição, os três amigos podem ficar dispostos de $8 \times 3!$
Os restantes 7 podem dispor-se nos restantes 7 lugares na fila de $7!$ formas diferentes.
Logo, os jovens podem dispor-se de $8 \times 3! \times 7! = 241\,920$ formas diferentes

OPÇÃO: B

Exame 2023, 1.ª fase

6. Como o número deve ter 5 algarismos diferentes ($\underline{n}\ \underline{n}\ \underline{n}\ \underline{n}\ \underline{n}$) com os 6 algarismos de 0 a 5, e o algarismo das unidades deve ser o 5, existe apenas uma hipótese para o algarismo das unidades ($\underline{n}\ \underline{n}\ \underline{n}\ \underline{n}\ \underline{5}$)
Como o algarismo das dezenas de milhar não pode ser 0 nem 5 (porque é o algarismo das unidades).

$$\underset{}{\overset{1,2,3,4}{\underline{\ n\ }}}\ \underline{n}\ \underline{n}\ \underline{n}\ \underline{5}$$

Para o algarismo dos milhares, existem também 4 hipóteses, porque o 0 já pode ser considerado nesta posição.
Para o algarismo das centenas, existem 3 hipóteses, uma vez que os outros três números já foram escolhidos, assim, para o algarismo das dezenas existem duas hipóteses.

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$$

OPÇÃO: D

Exame 2022, época especial

7. As peças podem ser da mesma cor ou de cor diferentes.
Deste modo:

- $3 \times {}^{12}C_2$, é o número de maneiras de escolher uma das 3 cores, ${}^{3}C_1$, e para cada uma delas, escolher duas das doze casas do tabuleiro para as duas peças da mesma cor, ${}^{12}C_2$
- ${}^{3}C_2 \times {}^{12}A_2$, é o número de maneiras de escolher duas das três cores, ${}^{3}C_2$, e para cada uma delas, escolher ordenadamente duas das doze casas do tabuleiro para as duas peças de cores diferentes, ${}^{12}A_2$

Exame 2022, 1.ª fase

8. Se a Fernanda oferecer 3 dos 5 livros e 3 das 7 canetas a um dos netos, como a ordem de seleção não

é relevante e o beneficiário deste conjunto pode ser qualquer um dos dois netos. O número de formas de fazer a repartição é:

$$2\times {}^5C_3\times {}^7C_3$$

Se a alternativa for oferecer 4 dos 5 livros e 2 das 7 canetas a um dos netos, como a ordem de seleção continua a não ser relevante e o beneficiário deste conjunto também pode ser qualquer um dos dois netos. O número de formas diferentes de fazer a repartição é:

$$2\times {}^5C_4\times {}^7C_2$$

Como qualquer uma destas alternativas pode acontecer em alternativa, temos que o número de modos diferentes que a Fernanda pode repartir os doze objetos pelos seus dois netos é:

$$2\times {}^5C_3\times {}^7C_3+2\times {}^5C_4\times {}^7C_2=910$$

Exame 2021, época especial

9. Para formar um triângulo com os pontos que estão sobre a retas temos de escolher dois pontos da reta r e um ponto da reta s, o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_2\times {}^nC_1=10n$, ou temos de escolher um ponto da reta r e dois pontos da reta s, o número de maneiras de o fazer é:

$$ {}^5C_1\times {}^nC_2=5\times\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{5n(n-1)\cancel{(n-2)}!}{2\cancel{(n-2)}!}=\frac{5n(n-1)}{2}$$

Assim, o número de triângulos distintos que se podem formar com os $n+5$ pontos das duas retas é dado, em função de n, por $10n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{20n+5n(n-1)}{2}$

Logo,

$$\frac{20n+5n(n-1)}{2}=175\Leftrightarrow 20n+5n^2-5n=350\Leftrightarrow 5n^2+15n-350=0\Leftrightarrow n^2+3n-70=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-70)}}{2\times1}\Leftrightarrow n=-10\vee n=7$$

Como $n\in IN$, vem que $n=7$

Exame 2021, 2.ª fase

10. Tem-se que:

Dos três dirigentes escolhem-se dois para conduzirem cada um dos veículos. O número de formas de o fazer é ${}^3C_2$. Para cada uma das formas, os dois dirigentes escolhidos permutam de 2! formas pelos dois veículos.

Portanto, para as posições de condução temos ${}^3C_2 \times 2! = {}^3A_2$ possibilidades.

No carro têm de viajar dois jogadores do sexo masculino e dois do sexo feminino.

Assim, dos cinco do sexo masculino escolhem-se dois. O número de formas de o fazer é ${}^5C_2$, e dos cinco do sexo feminino escolhem-se dois, o número de formas de o fazer é ${}^5C_2$.

Para cada uma destas formas, os quatro jogadores permutam de 4! formas distintas nos quatro lugares do carro.

Portanto, para ocupar os restantes lugares do carro temos ${}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4!$ possibilidades.

Finalmente, as restantes oito pessoas permutam de 8! formas distintas nos restantes oito lugares da carrinha.

Assim, uma expressão que dá o número de formas diferentes de distribuir os catorzes elementos pelos catorze lugares é ${}^3A_2 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4! \times 8!$

Exame 2021, 1.ª fase

11. Como apenas os 4 hóspedes dinamarqueses podem conduzir as 4 motos diferentes, a forma de os distribuir por cada mota é: ${}^4C_4 = P_4 = 4!$

Uma vez que são quatro motas de 2 lugares e um dos lugares já está ocupado pelos hóspedes dinamarqueses, sobram lugares para 3 hóspedes suecos. O número de maneiras diferentes de o fazer é ${}^4A_3$.

Assim, o número total de formas distintas de distribuir os sete hóspedes é:

$$4! \times {}^4A_3 = 576$$

OPÇÃO: D

Exame 2020, época especial

12. Os números superiores a 9999 (10000) e inferiores a 22000 (21333, neste caso só podemos usar os algarismos 0, 1, 2 e 3) têm cinco algarismos e começam por 1 ou por 2.

Números que começam por 1:

$$\underbrace{\quad 1 \quad}_{1} \ \underbrace{0,1,2 \text{ ou } 3}_{4} \ \underbrace{0,1,2 \text{ ou } 3}_{4} \ \underbrace{0,1,2 \text{ ou } 3}_{4} \ \underbrace{0,1,2 \text{ ou } 3}_{4}$$

O primeiro algarismo tem de ser o 1, logo para a 1.ª posição só existe uma hipótese. Para os restantes 4 algarismos existem 4 hipóteses para cada um, (0, 1, 2 e 3).

Portanto, para este caso temos $1\times4\times4\times4\times4=4^4=256$ números

Números que começam por 2:

$$\underbrace{\quad 2 \quad}_{1} \ \underbrace{\ 0 \text{ ou } 1\ }_{2} \ \underbrace{0,1,2 \text{ ou } 3}_{4} \ \underbrace{0,1,2 \text{ ou } 3}_{4} \ \underbrace{0,1,2 \text{ ou } 3}_{4}$$

O primeiro algarismo tem de ser o 2, pelo que para a 1.ª posição só existe uma hipótese. O algarismo da segunda posição tem de ser inferior a 2, pelo que temos duas hipóteses (0 ou 1).
Para os restantes 3 algarismos existem 4 hipóteses (0, 1, 2 e 3).

Logo, para este caso temos $1\times2\times4\times4\times4=2\times4^3=128$ números

Portanto, o total de números nas condições pedidas é 256 + 128 = 384

OPÇÃO: C

Exame 2020, 2.ª fase

13. Cada caixa numerada com um número par tem que ter pelo menos uma bola azul. Sendo cinco o número de caixas com o número par, das 8 bolas azuis iniciais, depois de se colocarem uma em cada caixa, sobram apenas 3 colas azuis.
Seguindo o mesmo raciocínio, cada caixa numerada com um número ímpar tem que ter pelo menos uma bola branca. Sendo cinco o número de caixas com o número ímpar, das sete bolas brancas iniciais, depois de se colocarem uma em cada caixa. Sobram apenas 2 bolas brancas.
Como a caixa tem no máximo duas bolas. Das 5 colas restam, 3 azuis e 2 brancas, estas serão distribuídas pelas 10 caixas, cada uma em sua caixa distinta.
Assim, temos:

$${}^{10}C_3\times{}^{7}C_2=2520$$

OPÇÃO: B

Exame 2020, 1.ª fase

14. Nas condições indicadas pretende-se colocar os cartões numa fila que pode ser dividida em duas partes.

1.ª – com três posições onde podem ser colocados os números 2, 3, 5 e 7 (primos)

$$\underbrace{P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4}_{4} \quad \underbrace{P_1 \quad P_2 \quad P_3}_{3} \quad \underbrace{P_1 \quad P_2}_{2}$$, com $P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4$ números primos

Isto é, $4 \times 3 \times 2 = {}^4A_3 = 24$

2.ª – com seis posições onde existem 6 números disponíveis, o primo que não foi colocado nas três primeiras posições e os restantes 5 números (1, 4, 6, 8, e 9)

$$\underbrace{P \quad N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5}_{6} \quad \underbrace{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5}_{5} \quad \underbrace{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4}_{4}$$

$$\underbrace{N_1 \quad N_2 \quad N_3}_{3} \quad \underbrace{N_1 \quad N_2}_{2} \quad \underbrace{N_1}_{1}$$

Isto é, $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = {}^6A_6 = 720$

Assim, o número de formas diferentes em que é possível colocar os cartões, de modo que os números inscritos nos três primeiros cartões sejam primos, é:

$$24 \times 720 = 17\ 280$$

Exame 2019, época especial

15. A turma de 26 alunos tem 15 raparigas e 11 rapazes.

Como o delegado de turma, que é rapaz, tem que pertencer à comissão, vamos considerar 15 raparigas e 10 rapazes para constituir comissões mistas de dois elementos.

Assim, temos que considerar dois casos:

- Comissões constituídas por um rapaz e uma rapariga (e o delegado)

  Neste caso temos ${}^{10}C_1 \times {}^{15}C_1 = 10 \times 15 = 150$ comissões possíveis

- Comissões constituídas por duas raparigas (e o delegado)

  Como o delegado pertence à comissão, esta continua a ser mista se forem escolhidas duas raparigas.

  Neste caso temos ${}^{15}C_2 = 105$

Desta forma, há 150 + 105 = 255 comissões diferentes que se podem formar.

OPÇÃO: D

Exame 2019, 2.ª fase

16. Com o número a começar em 6 e a terminar em 7 temos ${}^5C_2 = 10$ números diferentes.

Por exemplo
$$\left.\begin{array}{ccccccc} 6 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 6 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 6 & 6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 7 \end{array}\right\}$$
por observação verifica-se que temos 10 números diferentes.

De forma análoga se verificava o exemplo para as restantes hipóteses de formar números, não sendo, no entanto, necessária a sua construção.

Com o número a começar em 7 e a terminar em 5 temos ${}^5C_4 \times 1 = 5$ números diferentes.

Com o número a começar em 6 e a terminar em 5 temos ${}^5C_3 \times 2 = 20$ números diferentes.

Assim, no total, temos 10 + 5 + 20 = 35 números nas condições pedidas.

Exame 2019, 1.ª fase

17. Se pretendemos formar conjuntos com, pelo menos, três pessoas de entre um conjunto alargado de cinco pessoas, significa que podemos formar conjuntos com 3, 4 ou 5 pessoas.
Assim para:

- formar um conjunto com 3 pessoas, temos ${}^5C_3$
- formar um conjunto com 4 pessoas, temos ${}^5C_4$
- formar um conjunto com5 pessoas, temos ${}^5C_5$

Daqui temos ${}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 10 + 5 + 1 = 16$

OPÇÃO: D

Exame 2018, época especial

18. Como o primeiro caracter é uma vogal, existem 5 possibilidades para o primeiro dígito do código.
Para os restantes 3 dígitos dispomos de 9 algarismos, e como os algarismos devem ser todos diferentes temos ${}^{9}A_3$ escolhas diferentes.

Assim, nas condições do enunciado existem $5 \times {}^{9}A_3 = 2520$ códigos possíveis.

OPÇÃO: D

Exame 2018, 2.ª fase

19. Os doze alunos vão dispor-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.
Os alunos de espanhol têm que ficar juntos, logo existem 4! formas diferentes de se disporem.
Os alunos de Inglês têm que ficar juntos, logo existem 8! formas diferentes de se disporem.
Finalmente, existem 2 possibilidades de estes grupos se disporem lado a lado. O grupo de alunos de Espanhol à esquerda e o grupo de alunos de Inglês à direita ou vice-versa.
Assim, os alunos podem dispor-se de $2 \times 4! \times 8! = 1\,935\,360$

OPÇÃO: D

Exame 2018, 1.ª fase

20. O número a formar é maior do que 20 000, então para o algarismo das dezenas de milhar existem 3 possibilidades (2, 3 e 4).
Para as restantes 4 posições do número existem 4 algarismos disponíveis, o 0 e 1 e os dois algarismos que não figuram na posição das dezenas de milhar). Como os algarismos devem ser todos diferentes, para as restantes posições, existem ${}^{4}A_4 = 4!$ possibilidades.

Assim, nas condições do enunciado existem $3 \times 4! = 72$ números.

OPÇÃO: C

Exame 2017, época especial

21. Vamos começar por fazer um esquema, colocando os algarismos pares juntos

Hipótese 1	Par	Par	Ímpar	Ímpar	Ímpar
Hipótese 2	Ímpar	Par	Par	Ímpar	Ímpar
Hipótese 3	Ímpar	Ímpar	Par	Par	Ímpar
Hipótese 4	Ímpar	Ímpar	Ímpar	Ímpar	Par

Como os números pares podem trocar entre si, temos que existem $2\times 4=8$ formas diferentes.

Os algarismos ímpares ocupam as 3 posições restantes, podendo trocar entre si, o que corresponde a ${}^{3}A_{3}=3!=6$ disposições diferentes.

Assim, considerando todas as disposições diferentes dos algarismos pares e ímpares, temos que o total de números naturais nas condições do enunciado é $8\times 6=48$

OPÇÃO: B

Exame 2017, 2.ª fase

22. Os algarismos usados são os de 1 a 9. Assim, um número formado por 4 algarismos que seja múltiplo de 5 tem que, necessariamente, terminar em 5.

Logo, para cada uma das restantes 3 posições temos nove possibilidades. Como os números podem ser repetidos temos ${}^{9}A'_{3}=9^{3}=729$ números de 4 algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9 e que termine em 5.

OPÇÃO: A

Exame 2017, 1.ª fase

23. Existem 4 números pares (2, 4, 6 e 8).

Se considerar-mos uma única fila, temos 4 fichas pares, diferentes, para 4 posições. Como a ordem de colocação é relevante, temos ${}^{4}A_{4}=4!$ formas de colocar os números pares numa única fila horizontal.

Como existem 4 filas horizontais, o número de formas que existem para dispor as fichas com números pares no tabuleiro, ocupando uma única fila horizontal é $4\times 4!$

Depois da colocação das fichas com um número par, restam 16 – 4 = 12 posições disponíveis no tabuleiro que podem ser ocupados por fichas com número ímpar, como são diferentes é relevante a ordem de colocação, temos que existem ${}^{12}A_{5}$ formas de dispor as fichas com números ímpares.

Assim o número de possibilidades para dispor as 9 fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal é:

$$4\times 4!\times {}^{12}A_{5}=9\ 123\ 840$$

Exame 2016, 2.ª fase

24. Para que o número seja ímpar o algarismo das unidades tem que ser o 1, uma vez que é o único algarismo ímpar que existe. Assim dos 9 algarismos disponíveis, apenas 8 podem ser ocupados pelas bolas com os números 2 e 4.

Como existem 4 bolas com o número 2 para 8 posições, aqui não interessa a ordem porque as bolas com o número 2 são todas iguais, temos ${}^{8}C_{4}$ hipóteses.

Como existe apenas 1 bola com o número 4, para as 4 posições restantes (excluindo o algarismo das unidades e as 4 posições ocupadas pela bola com o número 2), temos ${}^{4}C_{1}$ hipóteses.

As restantes posições são ocupadas pelas 3 bolas com o número 1 que sobraram.

Logo a quantidade de números ímpares que é possível obter é:

$${}^{8}C_{4} \times {}^{4}C_{1} = 280$$

Exame 2016, 1.ª fase

25. Como os rapazes têm que estar juntos, temos ${}^{3}A_{3} = 3!$ para dispor os rapazes juntos.

Por cada grupo de rapazes existem ${}^{7}A_{7} = 7!$ ordenações possíveis dos nove jovens, correspondendo à disposição das seis raparigas e do grupo de rapazes, considerando que a ordenação é relevante.

Assim, o número de maneiras de dispor os nove jovens, com os três rapazes juntos é:

$$3! \times 7! = 30\,240$$

OPÇÃO: B

O esquema serve apenas para mostrar o que é pedido.

Rapaz 3	Rapaz 2	Rapaz 1	Rapariga 6	Rapariga 5	Rapariga 4	Rapariga 3	Rapariga 2	Rapariga 1
Rapariga 6	Rapaz 3	Rapaz 2	Rapaz 1	Rapariga 5	Rapariga 4	Rapariga 3	Rapariga 2	Rapariga 1
Rapariga 6	Rapariga 5	Rapaz 3	Rapaz 2	Rapaz 1	Rapariga 4	Rapariga 3	Rapariga 2	Rapariga 1
Rapariga 6	Rapariga 5	Rapariga 4	Rapaz 1	Rapaz 1	Rapaz 1	Rapariga 2	Rapariga 2	Rapariga 1
Rapariga 6	Rapariga 5	Rapariga 4	Rapariga 3	Rapaz 3	Rapaz 2	Rapaz 1	Rapariga 2	Rapariga 1
Rapariga 6	Rapariga 5	Rapariga 4	Rapariga 3	Rapariga 2	Rapaz 3	Rapaz 2	Rapaz 1	Rapariga 1
Rapariga 6	Rapariga 5	Rapariga 4	Rapariga 3	Rapariga 2	Rapariga 1	Rapaz 2	Rapaz 2	Rapaz 1

Exame 2015, época especial

26. Colocando cada um dos rapazes nas extremidades, existem duas hipóteses correspondentes a uma troca entre os rapazes.

$$\text{Rapaz}_1 \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \text{Rapaz}_2$$
$$\text{Rapaz}_2 \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \text{Rapaz}_1$$

As 4 raparigas podem permutar entre si, logo existem $P_4 = {}^4A_4 = 4! = 24$ maneiras diferentes de sentar as raparigas.

Assim, temos $2 \times 24 = 48$

OPÇÃO: C

Exame 2015, 1.ª fase

27. Para que os números com cinco algarismos sejam ímpares e tenham 4 algarismos pares, temos:

$$\boxed{\text{par}} \quad \boxed{\text{par}} \quad \boxed{\text{par}} \quad \boxed{\text{par}} \quad \boxed{\text{ímpar}}$$

Como o número tem que ser superior a 20 000 temos:

$$\boxed{2,4,6,8} \quad \boxed{0,2,4,6,8} \quad \boxed{0,2,4,6,8} \quad \boxed{0,2,4,6,8} \quad \boxed{1,3,5,7,9}$$

Isto é, $4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 4 \times 5^4$

OPÇÃO: D

Exame 2014, época especial

28. Como o número tem 10 algarismos e 6 dos 10 são ocupados com o algarismo 2, existem ${}^{10}C_6$ maneiras diferentes de colocar o algarismo 2.

Para as restantes posições (4), como podem existir repetições de algarismos, menos o 2 e a ordem neste caso é relevante, temos ${}^8A'_4$

Logo o total de números diferentes que existem com 10 algarismos sendo que 6 são o algarismo 2, é

$${}^{10}C_6 \times {}^8A'_4 = {}^8C_4 \times 8^4$$

OPÇÃO: A

Exame 2014, 1.ª fase

29. As bolas 3 e 4 podem permutar entre si, logo existem 2 maneiras diferentes de elas se apresentarem em conjunto. (34 ou 43).

Para que as duas bolas fiquem juntas num conjunto de 5 elementos, vamos ter $(5-2+1)=4$ possibilidades de elas estarem juntas.

As restantes 3 bolas podem permutar entre si nos 3 espaços que sobram, isto é, $P_3 = {}^3A_3 = 3!$

Assim, temos $2 \times 4 \times 3! = 48$ maneiras diferentes de as colocar.

Teste Intermédio 12.º ano, novembro 2013

30. Comecemos por designar as faces concorrentes no vértice A como as faces de cima e as restantes como as faces de baixo.

Temos dois casos possíveis para "pelo menos três das faces concorrentes no vértice A"
1.º aquelas em que todas as faces (4) de cima ficam numeradas com números ímpares
2.º aquelas em que 3 das 4 faces de cima ficam numeradas com números ímpares

1.º Se todas as 4 faces de cima ficarem numeradas com números ímpares, sendo que uma delas já está numerada com o número 1, então temos três números (3, 5 e 7) disponíveis para as restantes 3 faces, considerando que a ordem é relevante e não existem repetições, temos $P_3 = {}^3A_3 = 3!$ possibilidades de organizar os números ímpares de cima.
Sobram os quatro números pares (2, 4, 6 e 8) que vão ser colocados nas faces de baixo, sem repetições e com ordem relevante, isto é, $P_4 = {}^4A_4 = 4!$.
Assim, existem $3!\times 4!$ formas de numerar as restantes faces do octaedro, garantindo que as faces de cima ficam numeradas com números ímpares.

2.º Se 3 das 4 faces de cima ficarem numeradas com números ímpares, temos que um dos números de cima é par. Devemos escolher um dos quatro números pares (2, 4, 6 e 8) disponíveis e escolher uma das 3 faces disponíveis para o colocar, ou seja, 3×4 possibilidades.
Para as duas faces que restam, temos 3 números ímpares (3, 5 e 7) para dois lugares, isto é, ${}^3A_2$ maneiras diferentes de os colocar nas faces de cima.
Depois das faces de cima estarem preenchidas temos que numerar as de baixo, com os números que sobram.

Assim, como a ordem é relevante e não existem repetições temos $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ formas de diferentes de colocar os números nas faces de baixo.

Logo, o número total de formas diferentes que podemos numerar as faces do octaedro, garantindo que temos, pelo menos, 3 das faces de cima com números ímpares é:

$$3!\times 4! + 4\times 3\times {}^3A_2\times 4! = 1872$$

Teste Intermédio 12.º ano, novembro 2013