



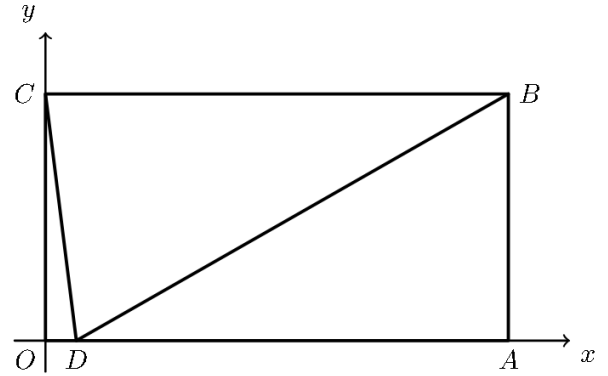
GEOMETRIA ANALÍTICA – PRODUTO ESCALAR

Exercícios de Exames e Testes Intermédios

1. Na figura, estão representados, num referencial o.n. Oxy , o retângulo $[OABC]$ e os segmentos de reta $[CD]$ e $[DB]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[AO]$;
- $\overline{OC} = 8$ e $\overline{OA} = 15$;
- $\overline{DC} \cdot \overline{DB} = 50$;
- $\overline{OD} < \overline{DA}$.



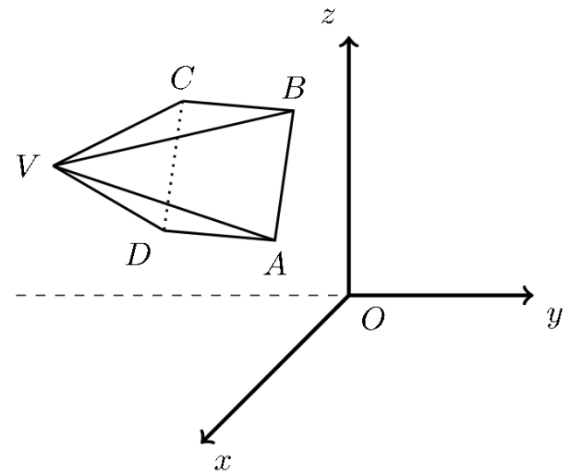
Determine as coordenadas do ponto D .

Exame 2025, época especial

2. Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice V .

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \sqrt{6}$;
- o centro da base da pirâmide, M , tem coordenadas $(2, -1, 3)$;
- o ponto V tem abcissa positiva;
- o plano ABC é definido pela equação $2x - y + z - 8 = 0$;
- o volume da pirâmide é $4\sqrt{6}$.

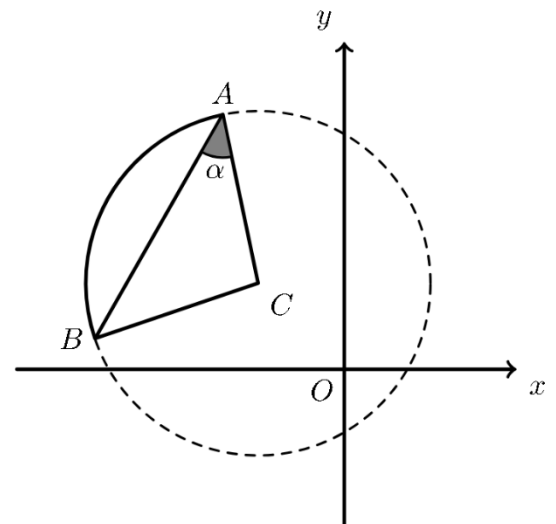


Qual é o valor do produto escalar $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$?

- (A) -6 (B) 0 (C) $2\sqrt{6}$ (D) 6

Exame 2025, 2.ª fase

3. Na figura, estão representados, num referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro C , definida pela equação $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$, o triângulo $[ABC]$ e o ângulo BAC , de amplitude α , em radianos, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



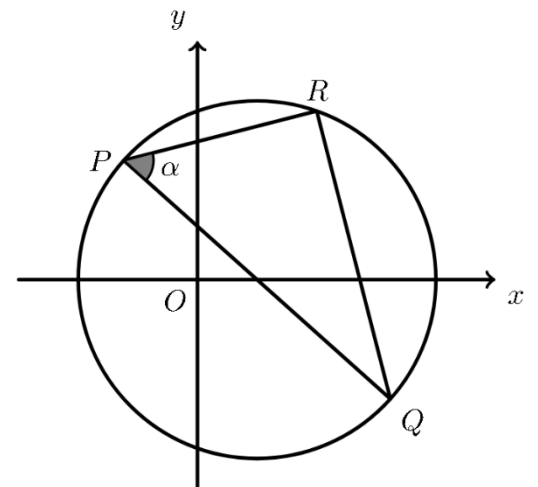
Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor exato do comprimento do arco AB .

Exame 2025, 1.ª fase

4. Na figura, estão representados, num referencial o.n. Oxy , a circunferência de equação $(x-1)^2 + y^2 = 9$ e o triângulo $[PQR]$, inscrito na circunferência.



Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo QPR .

Sabe-se que:

- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = 27$.

Determine o valor de α .

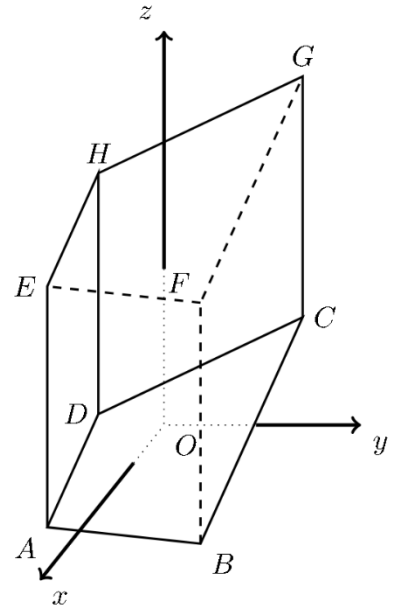
Exame 2024, 2.ª fase

5. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de base $[ABCD]$ e $[EFGH]$.

Sabe-se que:

- as bases do prisma são trapézios retângulos;
- o ponto A tem coordenadas $(4, -4, -3)$, e o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa;
- uma equação da reta BC é $(x, y, z) = (3, 5, 1) + k(2, 3, 6)$, $k \in \mathbb{R}$

Determine, sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, a amplitude do ângulo convexo AOB .



Exame 2024, 1.ª fase

6. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. Oxy , o retângulo $[OABC]$.

Sabe-se que:

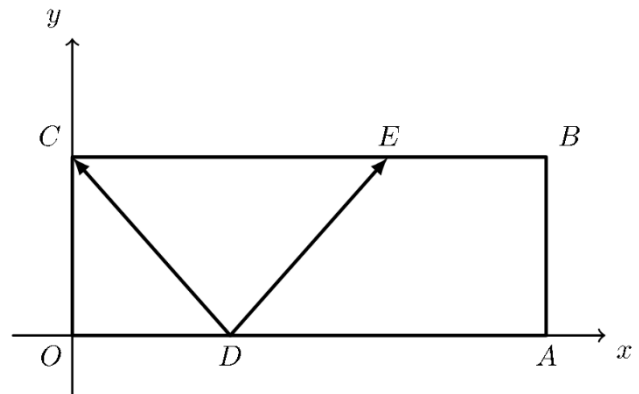
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[AO]$;
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[CB]$;

- $\overline{EB} = \overline{OD} = \frac{\overline{OA}}{3}$;

- $\overline{OC} = \frac{\overline{OA}}{4}$;

- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7$

Determine \overline{OA} .



Exame 2023, 2.ª fase

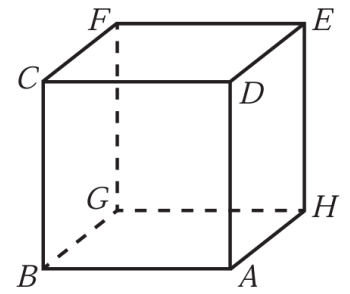
7. Na figura, está representado um cubo $[ABCDEFGH]$.

Fixado um determinado referencial o.n. $Oxyz$, tem-se:

$$A(-2, 5, 0), B(1, -1, 2) \text{ e } C(3, 2, 8)$$

Qual é o valor de $\overline{AB} \cdot \overline{HE}$?

- (A) -49 (B) 0 (C) 7 (D) 49



Exame 2022, 2.ª fase

8. Considere, num referencial o.n. Oxy , o gráfico da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = x^2$, e uma reta r , não vertical, que passa no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

Sejam A e B os pontos de interseção da reta r com o gráfico da função f .

Mostre que o ângulo convexo AOB é um ângulo reto.

Exame 2022, 2.ª fase

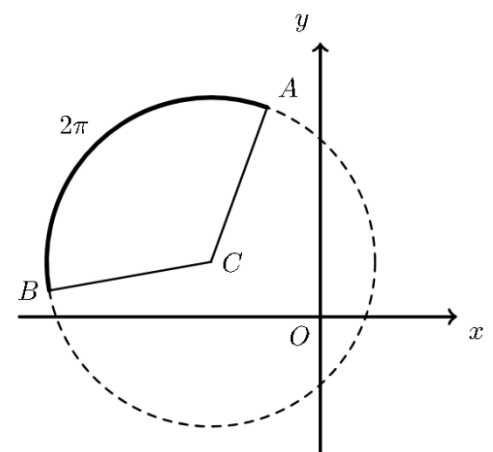
9. Na figura ao lado, está representada, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de equação $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$

O ponto C é o centro da circunferência.

A e B são dois pontos da circunferência.

O arco de circunferência AB tem comprimento 2π .

Determine o valor do produto escalar $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$.

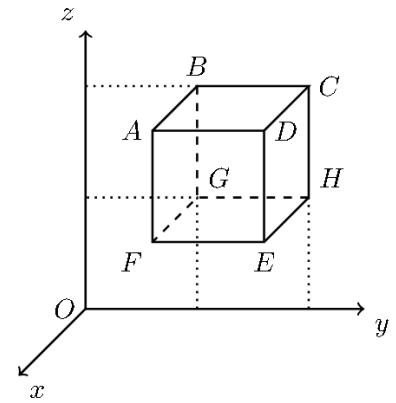


Exame 2022, 1.ª fase

10. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$ em que cada aresta é paralela a um dos eixos coordenados.

Sabe-se que:

- o vértice B tem coordenadas $(0, 2, 4)$;
- o vetor \overline{BE} tem coordenadas $(2, 2, -2)$;
- a aresta $[BG]$ é paralela ao eixo Oz ;



Determine a amplitude do ângulo OBE .

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve no mínimo, três casas decimais.

Exame 2020, época especial

11. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

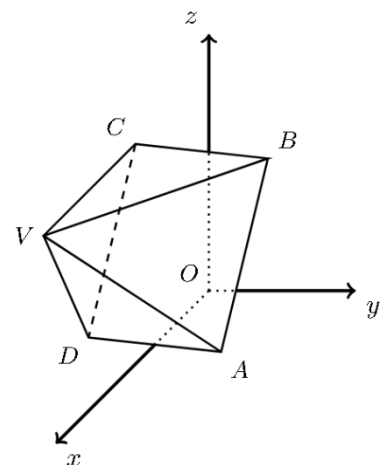
Os vértices A e C têm coordenadas $(2, 1, 0)$ e $(0, -1, 2)$, respetivamente.

O vértice V tem coordenadas $(3, -1, 2)$

Determine a amplitude do ângulo VAC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.



Exame 2019, 1.ª fase

12. Considere num referencial, o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e o ponto P de coordenadas $(1, 1, 1)$ pertencente a essa superfície esférica.

Seja R o ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas.

Determine a amplitude do ângulo ROP .

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Exame 2018, época especial

13. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 10$$

Seja C o centro da superfície esférica e seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano Oxy .

Determine a amplitude do ângulo AOC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

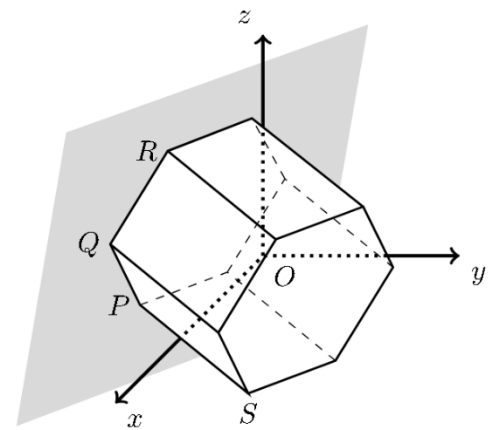
Exame 2018, 2.ª fase

14. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[PR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$

Determine o produto escalar de $\overline{PQ} \cdot \overline{PR}$



Exame 2018, 1.ª fase

15. Considere, num referencial o.n. Oxy , dois pontos distintos, R e S .

Seja A o conjunto dos pontos P desse plano que verificam a condição $\overline{PR} \cdot \overline{PS} = 0$

($\overline{PR} \cdot \overline{PS}$ designa o produto escalar de \overline{PR} por \overline{PS}).

Qual das afirmações é verdadeira?

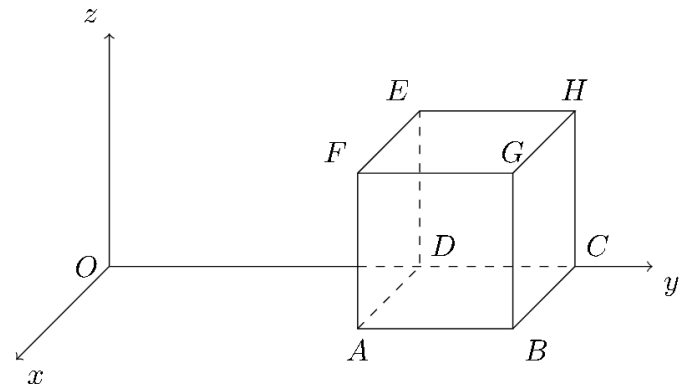
- (A) O conjunto A é a mediatriz do segmento de reta $[RS]$.
- (B) O conjunto A é o segmento de reta $[RS]$.
- (C) O conjunto A é o triângulo $[ROS]$.
- (D) O conjunto A é a circunferência de diâmetro $[RS]$

Exame 2017, época especial

16. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano Oxy ;
- a aresta $[CD]$ está contida no eixo Oy ;
- o ponto D tem coordenadas $(0, 4, 0)$;
- o plano ACG é definido pela equação $x + y - z - 6 = 0$;
- o vértice A tem abcissa igual a 2.



Seja P o vértice de uma pirâmide regular de base $[EFGH]$

Sabe-se que:

- a cota do ponto P é superior a 2;
- o volume da pirâmide é 4.

Determine a amplitude do ângulo OGP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

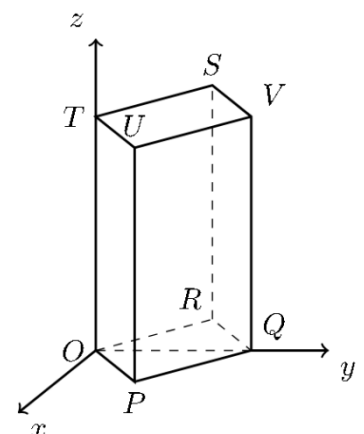
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame 2017, 2.ª fase

17. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano Oxy ;
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz ;
- o plano STU tem equação $z = 3$



Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS}$

Exame 2017, 1.ª fase

18. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$

Sabe-se que:

- os pontos C , A e E pertencem aos eixos coordenados Ox , Oy e Oz , respetivamente;
- o ponto A tem coordenadas $(0, 2, 0)$;
- o plano OFB é definido pela equação $3x + 3y - z = 0$.

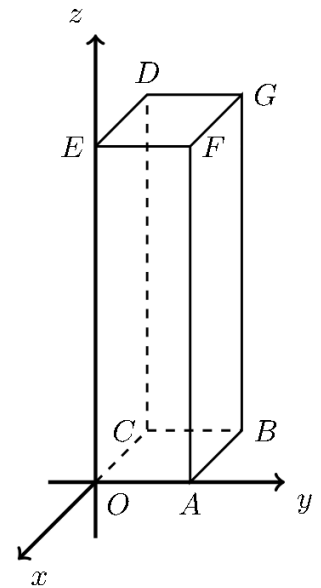
Seja P o ponto de cota igual a 1 que pertence à aresta $[BG]$.

Seja R o simétrico do ponto P relativamente à origem.

Determine a amplitude do ângulo RAP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.



Exame 2016, época especial

19. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação $3x + 2y + 4z - 12 = 0$

Sejam A e B os pontos pertencentes ao plano α , tais que A pertence ao semieixo positivo Ox e B pertence ao semieixo positivo Oy

Seja P um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo Oz

Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo APB é agudo

Exame 2016, 2.ª fase

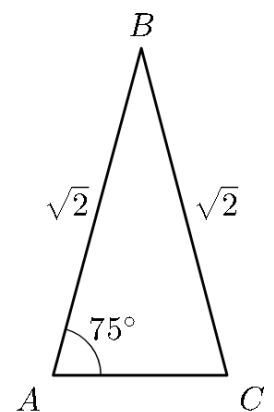
20. Na figura, está representado um triângulo isósceles $[ABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$
- $\widehat{BAC} = 75^\circ$

Qual é o valor do produto escalar $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$?

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$



Exame 2016, 1.ª fase



21. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12.
- Qual é o valor do produto escalar $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$?
- (A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3

Exame 2015, época especial

22. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano β definido pela condição $2x - y + z - 4 = 0$
- Considere o ponto $A(1, 2, 3)$
- Seja B o ponto de interseção do plano β com o eixo Ox
- Seja C o simétrico do ponto B relativamente ao plano Oyz
- Determine a amplitude do ângulo BAC
- Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Exame 2015, época especial

23. Na figura, está representado num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTUV]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

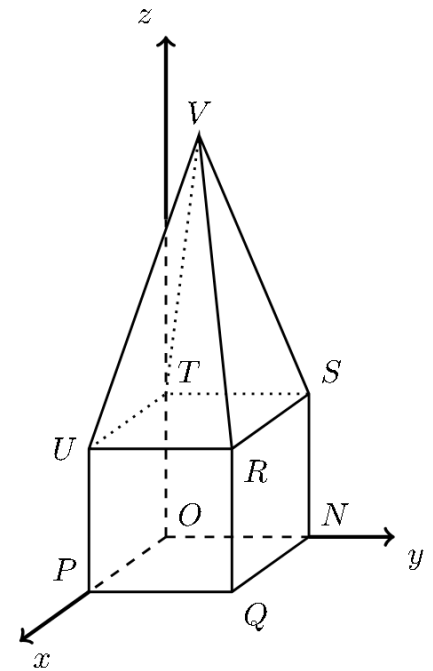
Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox
- o vértice N pertence ao eixo Oy
- o vértice T pertence ao eixo Oz
- o vértice R tem coordenadas $(2, 2, 2)$
- o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$

Seja A um ponto pertencente ao plano QRS

Sabe-se que:

- o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;
- os vetores \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{TQ} são perpendiculares.



Determine a abcissa do ponto A , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equaçãom devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$);
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Exame 2015, 2.ª fase

24. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0, 0, 2)$ e $B(4, 0, 0)$

Seja P o ponto pertencente ao plano Oxy tal que:

- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B
- a sua ordenada é positiva;
- $\widehat{BAP} = \frac{\pi}{3}$

Determine a ordenada do ponto P

Exame 2015, 1.ª fase