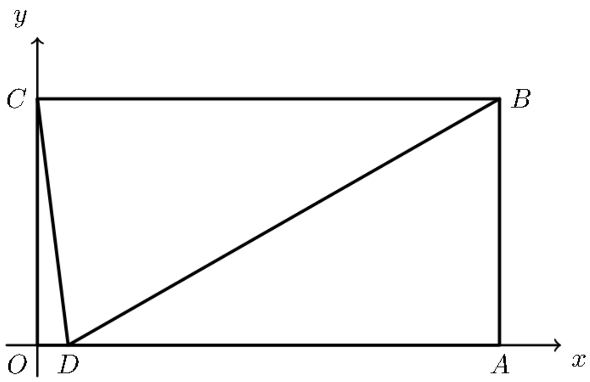
GEOMETRIA ANALÍTICA – PRODUTO ESCALAR
Exercícios de Exames e Testes Intermédios

1. Na figura, estão representados, num referencial o.n. Oxy, o retângulo $[OABC]$ e os segmentos de reta $[CD]$ e $[DB]$.

Sabe-se que:



- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy;
- o pondo D pertence ao segmento de reta $[AO]$;
- $\overline{OC} = 8$ e $\overline{OA} = 15$;
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = 50$;
- $\overline{OD} < \overline{DA}$.

Determine as coordenadas do ponto D.

Exame 2025, época especial

Sabemos que $C(0,8)$, $A(15,0)$ e $B(15,8)$

$\overrightarrow{DC} = C - D = (0,8) - (x_D, 0) = (-x_D, 8)$
$\overrightarrow{DB} = B - D = (15,8) - (x_D, 0) = (15 - x_D, 8)$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = 50 \Leftrightarrow (-x_D, 8) \cdot (15 - x_D, 8) = 50 \Leftrightarrow -15x_D + x_D^2 + 64 = 50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_D^2 - 15x_D + 14 = 0 \Leftrightarrow x_D = \frac{+15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \times 1 \times 14}}{2} \Leftrightarrow x_D = 1 \vee x_D = 14$$

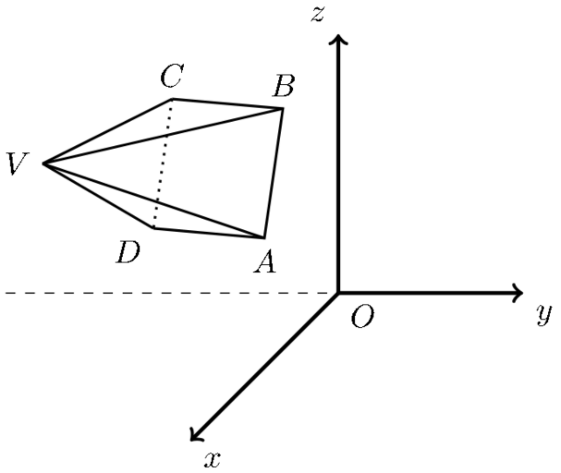
Como $\overline{OD} < \overline{DA}$, então $x_D = 1$

$\therefore D(1,0)$

2. Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice V.

Sabe-se que:

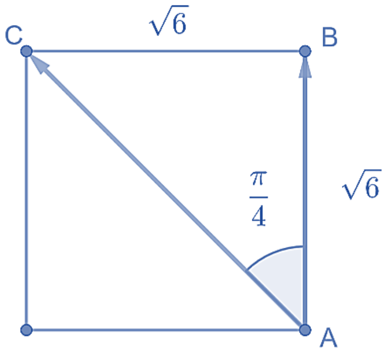
- $\overline{AB} = \sqrt{6}$;
- o centro da base da pirâmide, M, tem coordenadas $(2, -1, 3)$;
- o ponto V tem abcissa positiva;
- o plano ABC é definido pela equação $2x - y + z - 8 = 0$;
- o volume da pirâmide é $4\sqrt{6}$.



Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

(A) -6 (B) 0 (C) $2\sqrt{6}$ (D) 6

Exame 2025, 2.ª fase

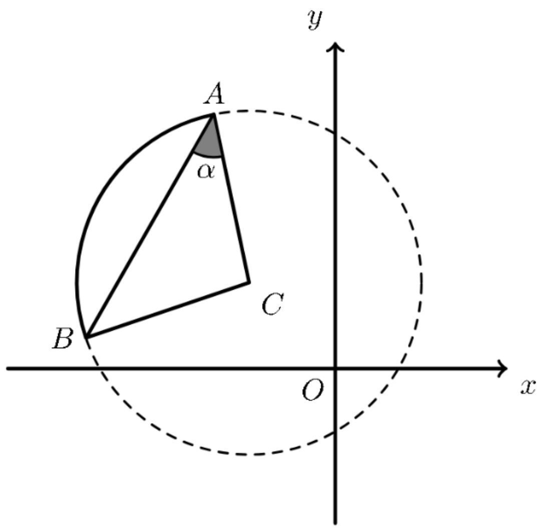


$$\overline{AC}^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{6+6} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{12}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cos\left(B\hat{A}C\right) = \sqrt{6} \times \sqrt{12} \times \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{72} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

OPÇÃO: D

3. Na figura, estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro C, definida pela equação $(x+1)^2+(y-1)^2=4$, o triângulo $[ABC]$ e o ângulo BAC, de amplitude α, em radianos, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor exato do comprimento do arco AB.

Exame 2025, 1.ª fase

Temos que, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$

Assim, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow 6=4\cos\alpha\times 2\times\cos\alpha\Leftrightarrow 6=8\cos^2\alpha\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{3}{4}\underset{\substack{\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\\ \cos\alpha>0}}{\Leftrightarrow}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $\alpha=\frac{\pi}{6}$

Assim, $A\hat{C}B=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$

Portanto, como o comprimento de um arco de circunferência é iguala αr, temos que:

$\overset{\frown}{AB}=\frac{2\pi}{3}\times 2=\frac{4\pi}{3}$

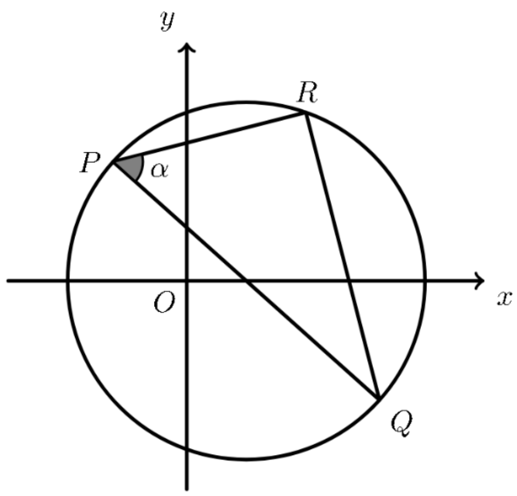
4. Na figura, estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de equação $(x-1)^2+y^2=9$ e o triângulo $[PQR]$, inscrito na circunferência.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo QPR.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QP}=27$.

Determine o valor de α.



Exame 2024, 2.ª fase

Como $[PQ]$ é diâmetro da circunferência então o triângulo $[PQR]$ inscrito na circunferência é retângulo em R.

Assim, $P\hat{Q}R=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=27 \Leftrightarrow \underbrace{\left\|\overrightarrow{QP}\right\|}_{\substack{\overline{QP}=6 \\ \text{o raio da} \\ \text{circunferência} \\ \text{é igual a 3}}}\times\left\|\overrightarrow{QR}\right\|\times\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha}=27 \Leftrightarrow 6\left\|\overrightarrow{QR}\right\|\operatorname{sen}\alpha=27 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{27}{6\left\|\overrightarrow{QR}\right\|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{9}{2\left\|\overrightarrow{QR}\right\|}$$

Como $[PQR]$ é um triângulo retângulo, temos que $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\left\|\overrightarrow{QR}\right\|}{6}$

Portanto,

$$\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{9}{2\left\|\overrightarrow{QR}\right\|} \\ \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\left\|\overrightarrow{QR}\right\|}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\left\|\overrightarrow{QR}\right\|}{6}=\dfrac{9}{2\left\|\overrightarrow{QR}\right\|} \\ \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\left\|\overrightarrow{QR}\right\|}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2=\dfrac{9\times 6}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\left\|\overrightarrow{QR}\right\|}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left\|\overrightarrow{QR}\right\|=\sqrt{27}\ ,\ \left\|\overrightarrow{QR}\right\|>0 \\ \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\left\|\overrightarrow{QR}\right\|}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left\|\overrightarrow{QR}\right\|=\sqrt{27} \\ \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\sqrt{27}}{6}\end{cases} \Leftrightarrow$$

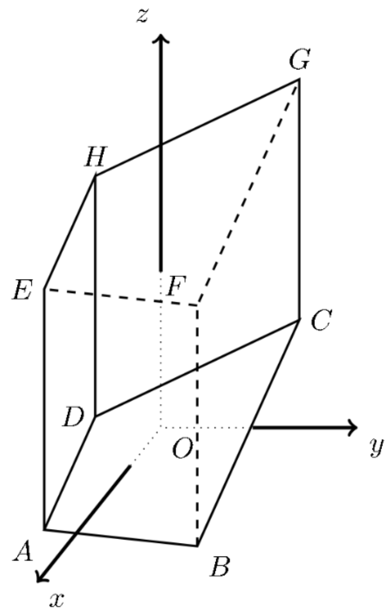
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left\|\overrightarrow{QR}\right\|=\sqrt{27} \\ \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Então $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

5. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de base $[ABCD]$ e $[EFGH]$.

Sabe-se que:

- as bases do prisma são trapézios retângulos;
- o ponto A tem coordenadas $(4,-4,-3)$, e o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa;
- uma equação da reta BC é $(x,y,z)=(3,5,1)+k(2,3,6)$, $k\in IR$



Determine, sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, a amplitude do ângulo convexo AOB.

Exame 2024, 1.ª fase

$BC:\ (x,y,z)=(3,5,1)+k(2,3,6)\ ,\ k\in IR$

Então qualquer ponto da reta é da forma $(3+2k,\ 5+3k,\ 1+6k)$

Como B tem ordenada igual ao dobro da abcissa, temos

$$5+3k=2(3+2k)\Leftrightarrow 5+3k=6+4k\Leftrightarrow k=-1$$

Assim, $B(3+2\times(-1),\ 5+3\times(-1),\ 1+6\times(-1))=(1,2,-5)$

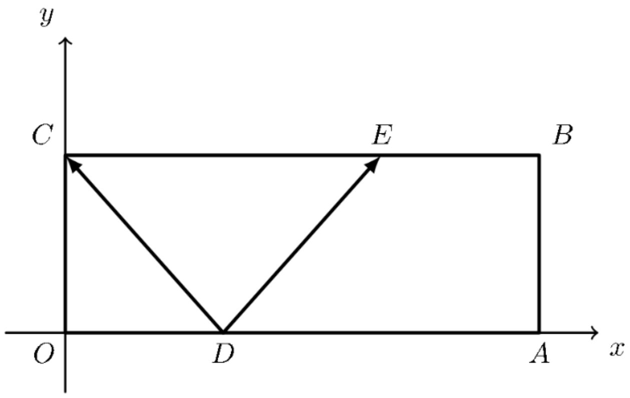
Logo $\overrightarrow{OA}(4,-4-3)$ e $\overrightarrow{OB}(1,2,-5)$

$$\cos\left(\overrightarrow{OA}\hat{\ }\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}=\frac{(4,-4,-3)\cdot(1,2,-5)}{\sqrt{4^2+(-4)^2+(-3)}\times\sqrt{1^2+2^2+(-5)^2}}=\frac{4-8-15}{\sqrt{41}\times\sqrt{30}}=\frac{11}{\sqrt{1230}}$$

Portanto, $A\hat{O}B=\cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{1230}}\right)\approx 72^{\text{o}}$

6. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. Oxy , o retângulo $[OABC]$.

Sabe-se que:



- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[AO]$;
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[CB]$;
- $\overline{EB} = \overline{OD} = \dfrac{\overline{OA}}{3}$;
- $\overline{OC} = \dfrac{\overline{OA}}{4}$;
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7$

Determine $\overline{OA}$.

Exame 2023, 2.ª fase

Seja G o ponto de $[AO]$, tal que $[EG]$ é perpendicular à reta EB

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GE}$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GE}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DG} + \underbrace{\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{GE}}_{\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{GE}} + \underbrace{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{DG}}_{\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{DG}} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{GE} =$$

$$= \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DG} + 0 + 0 + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{GE}$$

Como:

$$\overline{EB} = \overline{OD} = \frac{\overline{OA}}{3}$$

$\overline{EB} = \overline{GA}$, logo $\overline{OD} + \overline{GA} = \dfrac{\overline{OA}}{3} + \dfrac{\overline{OA}}{3} = \dfrac{2}{3}\overline{OA}$

$$\overline{OD} + \overline{DG} + \overline{GA} = \overline{OA} \Leftrightarrow \overline{DG} + \frac{2}{3}\overline{OA} = \overline{OA} \Leftrightarrow \overline{DG} = \frac{\overline{OA}}{3}$$

Assim, $\overline{OD} = \overline{DG} = \overline{GA}$, isto é, $\left\|\overrightarrow{OD}\right\| = \left\|\overrightarrow{DG}\right\| = \left\|\overrightarrow{GA}\right\|$

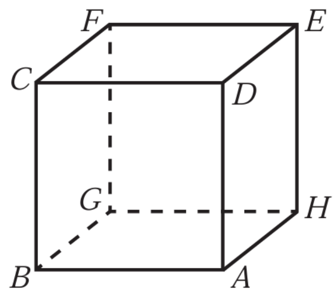
$$\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DG} = -\left\|\overrightarrow{DO}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OG}\right\| = -\frac{\overline{OA}}{3} \times \frac{\overline{OA}}{3} = -\frac{\overline{OA}^2}{9}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{GE} = \left\|\overrightarrow{OC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{GE}\right\| = \frac{\overline{OA}}{4} \times \frac{\overline{OA}}{4} = \frac{\overline{OA}^2}{16}$$

Portanto, $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{GE} \Leftrightarrow -7 = -\dfrac{\overline{OA}^2}{9} + \dfrac{\overline{OA}^2}{16} \Leftrightarrow -7 = -\dfrac{7}{144}\overline{OA}^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 144 \Leftrightarrow \overline{OA} \underset{\overline{OA}>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{144} \Leftrightarrow \overline{OA} = 12$$

7. Na figura, está representado um cubo $[ABCDEFGH]$.



Fixado um determinado referencial o.n. $Oxyz$, tem-se:

$$A(-2,5,0)\ ,\quad B(1,-1,2)\ \text{ e }\ C(3,2,8)$$

Qual é o valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HE}$?

(A) -49 (B) 0 (C) 7 (D) 49

Exame 2022, 2.ª fase

Temos que $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AD}$ e $[ABCDEFGH]$ é um cubo, logo, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

OPÇÃO: B

8. Considere, num referencial o.n. Oxy, o gráfico da função f, de domínio IR, definida por $f(x) = x^2$, e uma reta

r, não vertical, que passa no ponto de coordenadas $(0,1)$.

Sejam A e B os pontos de interseção da reta r com o gráfico da função f.

Mostre que o ângulo convexo AOB é um ângulo reto.

Exame 2022, 2.ª fase

A reta r pode ser definida por uma equação do tipo $y = mx + 1$, sendo m o declive e como passa no ponto de coordenadas $(0,1)$, a ordenada na origem é 1.

Vamos determinar as coordenadas dos pontos de interseção da reta r com a função f.

$$\begin{cases} y = mx+1 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = mx+1 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - mx - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2+4}}{2} \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m - \sqrt{m^2+4}}{2} \\ y = x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{m + \sqrt{m^2+4}}{2} \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m - \sqrt{m^2+4}}{2} \\ y = \left(\dfrac{m - \sqrt{m^2+4}}{2}\right)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{m + \sqrt{m^2+4}}{2} \\ y = \left(\dfrac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Assim, $\overrightarrow{OA}\left(\dfrac{m - \sqrt{m^2+4}}{2}, \left(\dfrac{m - \sqrt{m^2+4}}{2}\right)^2\right)$ e $\overrightarrow{OB}\left(\dfrac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}, \left(\dfrac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}\right)^2\right)$

Logo, $$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{m - \sqrt{m^2+4}}{2} \times \frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2} + \left(\frac{m - \sqrt{m^2+4}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{m^2 - m^2 - 4}{4} + \left(\frac{m - \sqrt{m^2+4}}{2} \times \frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{-4}{4} + \left(\frac{m^2 - m^2 - 4}{4}\right)^2 = -1 + \left(\frac{-4}{4}\right)^2 = -1 + 1 = 0$$

Como $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, o ângulo convexo AOB é reto, c.q.m.

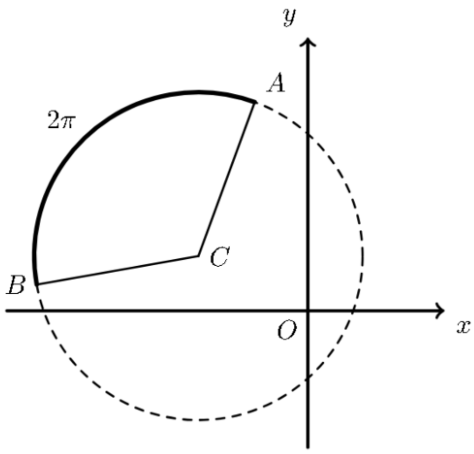
9. Na figura ao lado, está representada, em referencial o.n. Oxy, a circunferência de equação $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

O ponto C é o centro da circunferência.

A e B são dois pontos da circunferência.

O arco de circunferência AB tem comprimento 2π.

Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.



Exame 2022, 1.ª fase

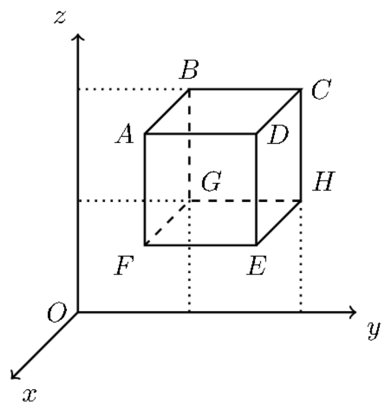
A circunferência tem raio 3, logo, $P_{\odot}=2\pi r=2\pi\times 3=6\pi$

$A\hat{C}B \longrightarrow 2\pi$
$2\pi \longrightarrow 6\pi$

$$A\hat{C}B=\frac{2\pi\times 2\pi}{6\pi}=\frac{4\pi\times\pi}{6\pi}=\frac{2}{3}\pi$$

Assim, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB}\right)=3\times 9\times\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{9}{2}$

10. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$ em que cada aresta é paralela a um dos eixos coordenados.



Sabe-se que:

- o vértice B tem coordenadas $(0,2,4)$;
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(2,2,-2)$;
- a aresta $[BG]$ é paralela ao eixo Oz;

Determine a amplitude do ângulo OBE.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve no mínimo, três casas decimais.

Exame 2020, época especial

Utilizando o produto escalar, a amplitude de OBE é:

$$\cos\left(\overrightarrow{BE}\hat{\ }\overrightarrow{BO}\right)=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BO}}{\left\|\overrightarrow{BE}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BO}\right\|}$$

$$\overrightarrow{BO}=O-B=(0,0,0)-(0,2,4)=(0,-2,-4) \text{ e } \left\|\overrightarrow{BO}\right\|=\sqrt{0^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BE}=(2,2,-2) \text{ e } \left\|\overrightarrow{BE}\right\|=\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BO}=(0,-2,-4)\cdot(2,2,-2)=0\times2+(-2)\times2+(-4)\times(-2)=-4+8=4$$

Assim, $\cos\left(\overrightarrow{BE}\hat{\ }\overrightarrow{BO}\right)=\dfrac{4}{2\sqrt{3}\times2\sqrt{5}}$

$$\therefore\ O\hat{B}E=\cos^{-1}\left(\frac{4}{2\sqrt{3}\times2\sqrt{5}}\right)\approx75^{\text{o}}$$

11. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

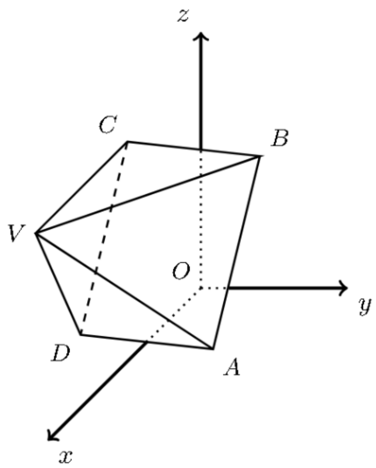
Os vértices A e C têm coordenadas $(2,1,0)$ e $(0,-1,2)$, respetivamente.

O vértice V tem coordenadas $(3,-1,2)$

Determine a amplitude do ângulo VAC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.



Exame 2019, 1.ª fase

Utilizando o produto escalar, a amplitude de VAC é:

$$\cos\left(\overrightarrow{AV}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AV}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AV}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

$\overrightarrow{AV}=V-A=(3,-1,2)-(2,1,0)=(1,-2,2)$ e $\left\|\overrightarrow{AV}\right\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,-1,2)-(2,1,0)=(-2,-2,2)$ e $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{12}$

$\overrightarrow{AV}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)\cdot(-2,-2,2)=1\times(-2)+(-2)\times(-2)+2\times2=-2+4+4=6$

Assim, $\cos\left(\overrightarrow{AV}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{6}{3\times\sqrt{12}}$

$$\therefore\ A\hat{V}C=\cos^{-1}\left(\frac{6}{3\sqrt{12}}\right)\approx 55^{\circ}$$

12. Considere num referencial, o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=3$ e o ponto P de coordenadas $(1,1,1)$ pertencente a essa superfície esférica.

Seja R o ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas.

Determine a amplitude do ângulo ROP.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Exame 2018, época especial

Como R pertence ao semieixo negativo das ordenadas, então as coordenadas de R são do tipo $(0, y_R, 0)$ com $y_R<0$.

Assim, $0^2+y_R^2+0^2=3 \Leftrightarrow y_R^2=3 \Leftrightarrow y_R=\pm\sqrt{3} \underset{y_R<0}{\Leftrightarrow} y_R=-\sqrt{3}$, logo, $R\left(0,-\sqrt{3},0\right)$

$$\cos\left(\overrightarrow{OP}\hat{\ }\overrightarrow{OR}\right)=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OR}\right\|}$$

$\overrightarrow{OP}=(1,1,1)$ e $\left\|\overrightarrow{OP}\right\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$\overrightarrow{OR}=\left(0,-\sqrt{3},0\right)$ e $\left\|\overrightarrow{OR}\right\|=\sqrt{0^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2+0^2}=\sqrt{3}$

Logo, $\cos\left(\overrightarrow{OP}\hat{\ }\overrightarrow{OR}\right)=\dfrac{(1,1,1)\cdot\left(0,-\sqrt{3},0\right)}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \quad R\hat{O}P=\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\approx 125^{\text{o}}$

13. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=10$$

Seja C o centro da superfície esférica e seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano Oxy.

Determine a amplitude do ângulo AOC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame 2018, 2.ª fase

Pela equação da superfície esférica temos que as coordenadas do ponto C, são $(1,2,-1)$

Como A é simétrico de C relativamente ao plano Oxy, então $C(1,2,1)$

$$\cos\left(\overrightarrow{OA}\,\hat{}\,\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}$$

$\overrightarrow{OA}=(1,2,-1)$ e $\left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{OC}=(1,2,1)$ e $\left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

Logo, $\cos\left(\overrightarrow{OA}\,\hat{}\,\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{(1,2,-1)\cdot(1,2,1)}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1+4-1}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

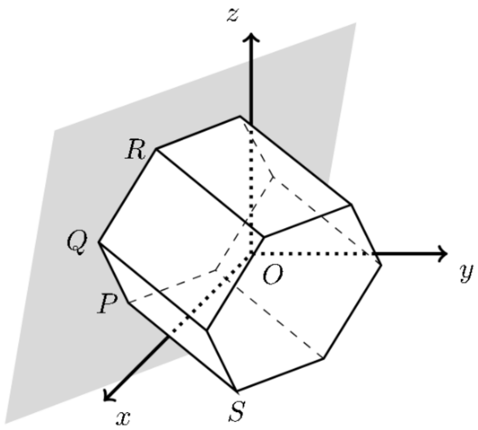
$\therefore\quad A\hat{O}C=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)\approx 48^{\circ}$

14. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[PR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$

Determine o produto escalar de $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$



Exame 2018, 1.ª fase

Os segmentos de reta $[PQ]$ e $[PR]$ são lados consecutivos de um hexágono regular, então

$\frac{(6-2)\times 180^\circ}{6} = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$, isto é, $\cos\left(\overrightarrow{QP} \hat{\ } \overrightarrow{QR}\right) = \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ e $\left\|\overrightarrow{QP}\right\| = \left\|\overrightarrow{QR}\right\| = 4$

Assim, $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \left\|\overrightarrow{QP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{QR}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{QP} \hat{\ } \overrightarrow{QR}\right) = 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$

15. Considere, num referencial o.n. Oxy, dois pontos distintos, R e S.

Seja A o conjunto dos pontos P desse plano que verificam a condição $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} = 0$

$\left(\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS}\right.$ designa o produto escalar de $\overrightarrow{PR}$ por $\left.\overrightarrow{PS}\right)$.

Qual das afirmações é verdadeira?

(A) O conjunto A é a mediatriz do segmento de reta $[RS]$.

(B) O conjunto A é o segmento de reta $[RS]$.

(C) O conjunto A é o triângulo $[ROS]$.

(D) O conjunto A é a circunferência de diâmetro $[RS]$

Exame 2017, época especial

Para qualquer ponto P da circunferência de diâmetro $[RS]$ o ângulo RPQ é reto em P, logo para qualquer ponto P da circunferência temos que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} = 0$.

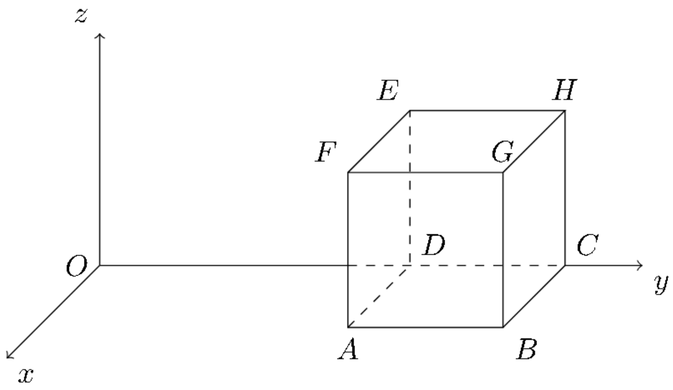
Caso, o ponto P esteja no interior da circunferência o ângulo RPQ é obtuso e $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} < 0$

Caso o ponto P esteja no exterior da circunferência o ângulo RPQ é agudo e $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} < 0$

Assim, o conjunto A dos pontos P tais que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} = 0$ é a circunferência de diâmetro $[RS]$

OPÇÃO: D

16. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$



Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano Oxy;
- a aresta $[CD]$ está contida no eixo Oy;
- o ponto D tem coordenadas $(0,4,0)$;
- o plano ACG é definido pela equação $x+y-z-6=0$;
- o vértice A tem abcissa igual a 2.

Seja P o vértice de uma pirâmide regular de base $[EFGH]$

Sabe-se que:

- a cota do ponto P é superior a 2;
- o volume da pirâmide é 4.

Determine a amplitude do ângulo OGP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame 2017, 2.ª fase

Como a abcissa do ponto A é 2, temos que $\overline{AD}=2$, logo

$$A_{[EFGH]}=\overline{AD}^2=2^2=4$$

Temos que o volume da pirâmide é 4, então

$$V_{[EFGHP]}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times A_{[EFGH]}\times h=4 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times 4\times h=4 \Leftrightarrow h=3$$

Como a cota de P é superior a 2 e a aresta do cubo é 2, então a cota de P é

$$z_P=2+h=2+3=5$$

Como o ponto a abcissa e a ordenada do ponto P está no centro da base, temos que $x_P=1$ e $y_P=5$, logo, $P(1,5,5)$

As coordenadas do ponto G são $(2,6,2)$, logo

$$\overrightarrow{GP} = P - G = (1,5,5)-(2,6,2) = (-1,-1,3)$$
$$\left\|\overrightarrow{GP}\right\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{11}$$

Como O é a origem do referencial, temos que

$$\overrightarrow{GO} = (-2,-6,-2)$$
$$\left\|\overrightarrow{GO}\right\| = \sqrt{(-2)^2+(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{44}$$

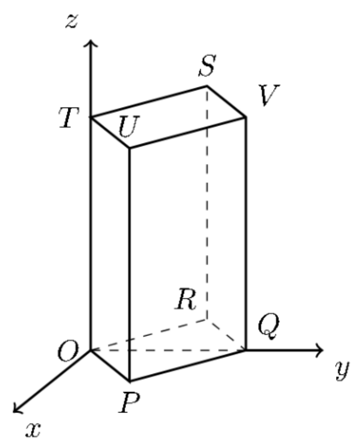
Assim, $\cos\left(\overrightarrow{GP}\,\hat{}\,\overrightarrow{GO}\right) = \dfrac{\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{GO}}{\left\|\overrightarrow{GP}\right\|\times\left\|\overrightarrow{GO}\right\|} = \dfrac{(-1,-1,3)\cdot(-2,-6,-2)}{\sqrt{11}\times\sqrt{44}} = \dfrac{2+6-6}{\sqrt{484}} = \dfrac{2}{\sqrt{486}}$

$\therefore\ \ O\hat{G}P = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{484}}\right) \approx 85^{\text{o}}$

17. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano Oxy;
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz;
- o plano STU tem equação $z=3$



Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP}\cdot\overrightarrow{RS}$

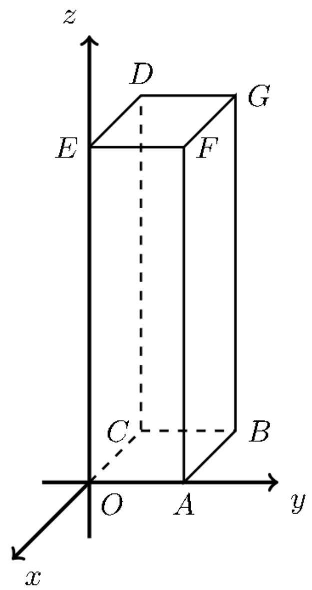
Exame 2017, 1.ª fase

Como as arestas $[UP]$ e $[RS]$ são arestas laterais do prisma, logo são paralelas e ambas têm comprimento igual a 3

Temos que os vetores $\overrightarrow{UP}$ e $\overrightarrow{RS}$ têm a mesma direção mas sentidos opostos, logo, $\cos\left(\overrightarrow{UP}\,\hat{}\,\overrightarrow{RS}\right) = \cos(\pi) = -1$

$$\overrightarrow{UP}\cdot\overrightarrow{RS} = \left\|\overrightarrow{UP}\right\|\times\left\|\overrightarrow{RS}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{UP}\,\hat{}\,\overrightarrow{RS}\right) = 3\times3\times(-1) = -9$$

18. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$



Sabe-se que:

- os pontos C, A e E pertencem aos eixos coordenados Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o ponto A tem coordenadas $(0,2,0)$;
- o plano OFB é definido pela equação $3x+3y-z=0$.

Seja P o ponto de cota igual a 1 que pertence à aresta $[BG]$.

Seja R o simétrico do ponto P relativamente à origem.

Determine a amplitude do ângulo RAP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame 2016, época especial

O ponto P pertence à aresta $[BG]$ e tem cota 1, logo, $P(-2,2,1)$

Como R é simétrico de P relativamente à origem, tem as três coordenadas simétricas, isto é, $R(2,-2,-1)$

Assim, $\cos\left(\overrightarrow{AP}\,\hat{}\,\overrightarrow{AR}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AR}\right\|}$

$\overrightarrow{AP}=P-A=(-2,2,1)-(0,2,0)=(-2,0,1)$ e $\left\|\overrightarrow{AP}\right\|=\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AR}=P-A=(2,-2,-1)-(0,2,0)=(2,-4,-1)$ e $\left\|\overrightarrow{AR}\right\|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$

Portanto, $\cos\left(\overrightarrow{AP}\,\hat{}\,\overrightarrow{AR}\right)=\dfrac{(-2,0,1)\cdot(2,-4,-1)}{\sqrt{5}\times\sqrt{21}}=\dfrac{-4+0-1}{\sqrt{105}}=-\dfrac{5}{\sqrt{105}}$

$\therefore\ \ R\hat{A}P=\cos^{-1}\left(-\dfrac{5}{\sqrt{105}}\right)\approx 109^{\text{o}}$

19. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação $3x+2y+4z-12=0$

Sejam A e B os pontos pertencentes ao plano α, tais que A pertence ao semieixo positivo Ox e B pertence ao semieixo positivo Oy

Seja P um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo Oz

Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo APB é agudo

Exame 2016, 2.ª fase

A pertence ao semieixo positivo das abcissas, logo $A(x_A, 0, 0)$, $x_A \in IR^+$

B pertence ao semieixo postivo das ordenadas, logo $B(0, y_B, 0)$, $y_B \in IR^+$

P pertence ao eixo das cotas diferente de zero, logo $P(0, 0, z_P)$, $z_P \in IR \setminus \{0\}$

APB é agudo se, o produto escalar dos vetores for positivo, isto é, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$

$\overrightarrow{PA} = A - P = (x_A, 0, 0) - (0, 0, z_P) = (x_A, 0, -z_P)$
$\overrightarrow{PB} = B - P = (0, y_B, 0) - (0, 0, z_P) = (0, y_B, -z_P)$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (x_A, 0, -z_P) - (0, y_B, -z_P) = 0 + 0 + (-z_P)^2 = {z_P}^2$

Logo, ${z_P}^2 > 0$, $\forall z_P \in IR \setminus \{0\}$

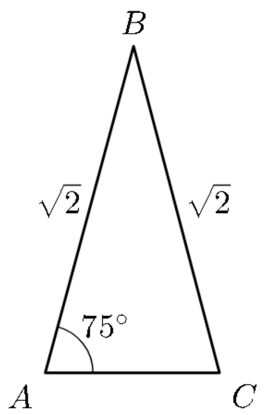
Portanto, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$, ou seja, o ângulo APB é agudo

20. Na figura, está representado um triângulo isósceles $[ABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$
- $B\hat{A}C = 75^{\circ}$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?



(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$

Exame 2016, 1.ª fase

Como $[ABC]$ é um triângulo isósceles, então $A\hat{B}C = 180^{\circ} - 2 \times 75^{\circ} = 30^{\circ}$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos(30^{\circ}) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

OPÇÃO: C

21. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12.

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

(A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3

Exame 2015, época especial

Como o hexágono é regular, então, a amplitude dos ângulos internos é igual a $\frac{(6-2) \times 180^{\circ}}{6} = \frac{720^{\circ}}{6} = 120^{\circ}$ e o comprimento de cada um dos lados é igual a $\frac{12}{6} = 2$.

Portanto, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}\right) = 2 \times 2 \times \cos(120^{\circ}) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

OPÇÃO: B

22. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano β definido pela condição $2x-y+z-4=0$

Considere o ponto $A(1,2,3)$

Seja B o ponto de interseção do plano β com o eixo Ox

Seja C o simétrico do ponto B relativamente ao plano Oyz

Determine a amplitude do ângulo BAC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Exame 2015, época especial

B pertence ao eixo Ox, logo, $B(x_B,0,0)$, $x_B \in IR$ e, como B pertence a β então

$$\begin{cases} 2x-y+z-4=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-0+0-4=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Assim, $B(2,0,0)$

Logo, $\overrightarrow{AB}=B-A=(2,0,0)-(1,2,3)=(1,-2,-3)$ e $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$

C é simétrico de B relativamente ao plano Oyz, logo a ordenada e cota são iguais e a abcisse é simétrica, isto é, $C(-2,0,0)$

Logo, $\overrightarrow{AC}=C-A=(-2,0,0)-(1,2,3)=(-3,-2,-3)$ e $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{22}$

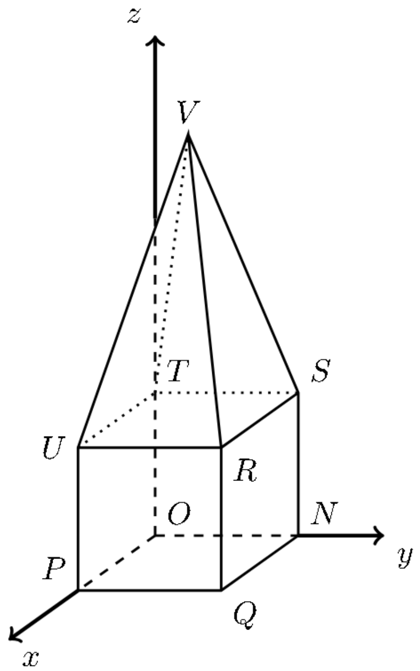
$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{(1,-2,-3)\cdot(-3,-2,-3)}{\sqrt{14}\times\sqrt{22}}=\frac{-3+4+9}{\sqrt{308}}=\frac{10}{\sqrt{308}}$$

$$\therefore\quad B\hat{A}C=\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{308}}\right)\approx 55^{\circ}$$

23. Na figura, está representado num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTUV]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox
- o vértice N pertence ao eixo Oy
- o vértice T pertence ao eixo Oz
- o vértice R tem coordenadas $(2,2,2)$
- o plano PQV é definido pela equação $6x+z-12=0$



Seja A um ponto pertencente ao plano QRS

Sabe-se que:

- o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;
- os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equaçãom devidamente identicado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x\in[-4,4]$ e $y\in[-2,7]$;
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Exame 2015, 2.ª fase

Como A pertence ao plano QRS e a equação que define o plano é $y=2$, então, $A(x_A, y_A, z_A)=(x_A, 2, z_A)$

Como a cota de A é igual ao cubo da abcissa, então, $z_A=x_A^3$

Assim, A tem coordenadas $(x_A, 2, x_A^3)$

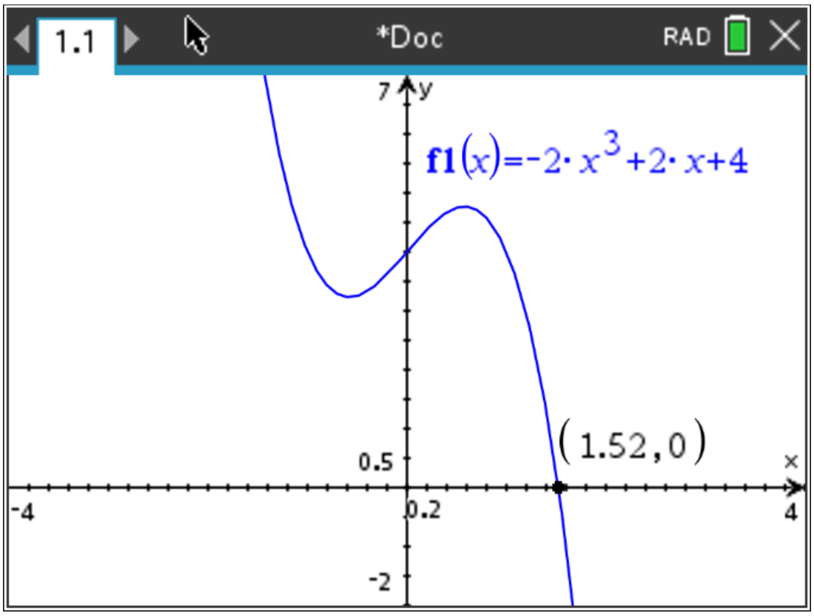
Sabemos que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares, logo, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{TQ}=0$

$\overrightarrow{OA}=A-O=(x_A, 2, x_A^3)-(0,0,0)=(x_A, 2, x_A^3)$

$\overrightarrow{TQ}=Q-T=(2,2,0)-(0,0,2)=(2,2,-2)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{TQ}=0 \Leftrightarrow (x_A, 2, x_A^3)\cdot(2,2,-2)=0 \Leftrightarrow 2x_A+4-2x_A^3=0 \Leftrightarrow -2x_A^3+2x_A+4=0$

Recorrendo à calculadora



Portanto, $x_A \approx 1{,}52$

24. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0,0,2)$ e $B(4,0,0)$

Seja P o ponto pertencente ao plano Oxy tal que:

- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B
- a sua ordenada é positiva;
- $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$

Determine a ordenada do ponto P

Exame 2015, 1.ª fase

P pertence ao plano Oxy, logo a sua cota é zero, a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B, isto é, $x_B = 4$ e a sua ordenada é positiva, assim, $P(4, y_B, 0)$ com $y_B \in IR^+$

Sabemos também que $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$, logo utilizando o produto escalar de vetores temos

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AP}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \hat{\ } \overrightarrow{AP}\right)$$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,0,0)-(0,0,2) = (4,0,-2)$ e $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (4, y_B, 0)-(0,0,2) = (4, y_B, -2)$ e $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{4^2+y_B^2+(-2)^2} = \sqrt{y_B^2+20}$, $y_B \in IR^+$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = (4,0,-2)\cdot(4, x_B, -2) = 16+0+4 = 20$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AP}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \hat{\ } \overrightarrow{AP}\right) \Leftrightarrow 20 = \sqrt{20} \times \sqrt{y_B^2+20} \times \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 = \sqrt{20y_B^2+400} \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{20y_B^2+400} = 40$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{20y_B^2+400}\right)^2 = 40^2$$

$$\Leftrightarrow 20y_B^2+400 = 1600$$

$$\Leftrightarrow 20y_B^2 = 1200$$

$$\Leftrightarrow y_B^2 = \frac{1200}{20}$$

$$\Leftrightarrow y_B^2 = 60$$

$$\Leftrightarrow y_B = \pm\sqrt{60}$$

$$\underset{y_B > 0}{\Leftrightarrow} y_B = \sqrt{60}$$