

1. Seja (a_n) a progressão aritmética, de termos positivos, tal que $a_{10} - a_4 = 3$ e $a_4 \times a_{10} = 40$ sabe-se que 173 é termo da sucessão (a_n) .

Determine a ordem desse termo.

Exame 2025, época especial

$$a_{10} = a_1 + 9r$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$\begin{cases} a_{10} - a_4 = 3 \\ a_4 \times a_{10} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 9r - a_1 - 3r = 3 \\ (a_1 + 3r) \times (a_1 + 9r) = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ \left(a_1 + 3 \times \frac{1}{2}\right) \left(a_1 + 9 \times \frac{1}{2}\right) = 40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ \left(a_1 + \frac{3}{2}\right) \left(a_1 + \frac{9}{2}\right) = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ a_1^2 + \frac{9}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{27}{4} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ a_1^2 + 6a_1 + \frac{27}{4} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ 4a_1^2 + 24a_1 + 27 = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ 4a_1^2 + 24a_1 - 133 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ a_1 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

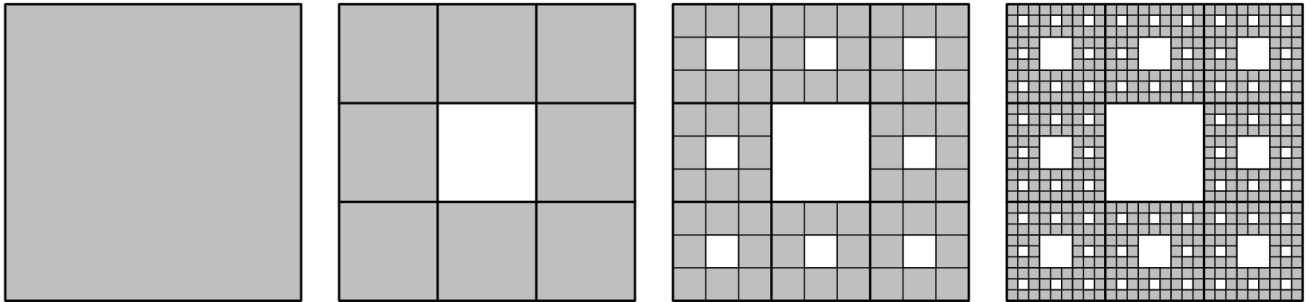
C.A.

$$4a_1^2 + 24a_1 - 133 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -\frac{19}{2} \vee a_1 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow a_1 = \frac{7}{2} \text{ sucessão de termos positivos}$$

$$\text{Assim, } a_n = a_1 + r(n-1) = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}n$$

$$\text{Portanto, } 3 + \frac{1}{2}n = 173 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n = 170 \Leftrightarrow n = 340$$

2. Na figura, apresentam-se as quatro primeiras composições geométricas da construção do Tapete de Sierpinski.



Tal como a figura sugere, nesta construção:

- a 1.^a composição é um quadrado;
- a 2.^a composição, com 8 quadrados, obtém-se decompondo a 1.^a em 9 quadrados iguais e removendo o quadrado central;
- cada uma das composições seguintes obtém-se decompondo cada um dos quadrados obtidos na composição anterior em 9 quadrados iguais e removendo os quadrados centrais.

Admita que, fixada uma unidade de medida, o quadrado inicial tem área igual a 9 e que se continuava a construção, de acordo com o procedimento descrito, até se obter a 50.^a composição.

Determine a área da 50.^a composição, ou seja, a área total dos quadrados que formam essa composição.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Exame 2025, 2.^a fase

A composição de cada quadrado é obtido da anterior

- dividindo em 9 quadrados;
- removendo o quadrado central, ou seja, é retirado $\frac{1}{9}$ da área total da composição anterior;

Assim, a área de cada composição é $9 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ da área da composição anterior, isto é, a razão da progressão geométrica é $\frac{8}{9}$

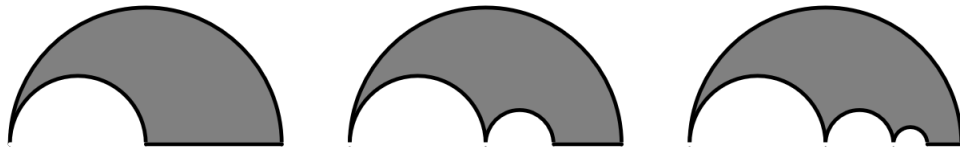
Assumindo que a área do primeiro termo é 9, temos que a progressão geométrica é:

$$a_n = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

Portanto a área da 50.^a composição é: $a_{50} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{50-1} \approx 0,028$

3. Considere uma sucessão de composições geométricas, construídas a partir de um semicírculo de raio 1.

Na figura, estão representadas as três primeiras composições dessa sucessão.



Tal como ilustrado na figura:

- a 1.^a composição foi obtida retirando-se ao semicírculo inicial um semicírculo nele contido, de raio $\frac{1}{2}$;
- a 2.^a composição foi obtida retirando-se à 1.^a composição um semicírculo nela contido, de raio $\frac{1}{4}$;
- a 3.^a composição foi obtida retirando-se à 2.^a composição um semicírculo nela contida, de raio $\frac{1}{8}$;
- e assim sucessivamente, retirando-se, em cada composição, um semicírculo contido na composição anterior, com metade do raio do semicírculo retirado nessa composição, de modo que o diâmetro de cada semicírculo retirado seja colinear com o diâmetro do semicírculo inicial.

Determine o perímetro da 20.^a composição geométrica desta sucessão.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Exame 2025, 1.^a fase

É possível dividir o perímetro da composição geométrica na soma de três sucessões:

- Primeira, comprimento do arco exterior da semicircunferência (a_n);
- Segunda, segmento de reta que está na base da semicircunferência (b_n);
- Terceira, comprimento dos arcos interiores da semicircunferência (c_n).

Neste caso temos de somar os 20 primeiros termos da sucessão.

$$\text{Perímetro da 20.ª composição geométrica} = a_{20} + b_{20} + S_{20}$$

Soma dos
20 primeiros
termos de c_n

Primeira:

Em todas as figuras, o comprimento do arco exterior da semicircunferência é sempre o mesmo, isto é, $a_n = \frac{2\pi \times 1}{2} = \pi$, sucessão constante, logo $a_{20} = \pi$

Segunda:

b_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ dado que cada segmento de reta é metade do comprimento do segmento anterior.

$$b_1 = 1, \text{ logo, } b_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ portanto, } b_{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

Terceira:

$$c_1 = \frac{2\pi \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\pi}{2}; \quad c_2 = \frac{2\pi \times \frac{1}{4}}{2} = \frac{\pi}{4}; \quad c_3 = \frac{2\pi \times \frac{1}{8}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{c_3}{c_2} = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}, \text{ logo o comprimento de cada um dos arcos é uma progressão}$$

geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$$c_n = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{2} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2} \times 2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_{20} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\frac{1}{2}} = \pi \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)$$

Perímetro da 20.ª composição geométrica = $a_{20} + b_{20} + S_{20} =$

$$= \pi + \pi \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \approx 6,28$$

Soma dos
20 primeiros
termos de c_n

4. Seja (u_n) a sucessão definida por

$$u_n = \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo da sucessão (u_n) ?

- (A) 8 (B) 10 (C) 18 (D) 38

Exame 2024, época especial

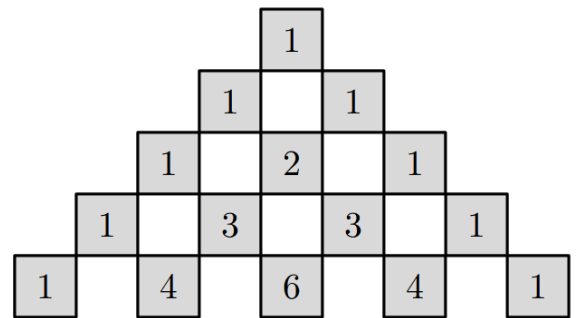
$$\begin{aligned} u_1 &= 3 \\ u_2 &= 2 \times 3 + 2 = 8 \\ u_3 &= 2 \times 8 + 2 = 18 \end{aligned}$$

OPÇÃO: C

5. Usando cartões numerados, construiu-se uma figura, com forma triangular, constituída pelas n primeiras linhas do triângulo de Pascal.

Na figura, estão representadas as cinco primeiras linhas dessa construção.

Calcule o valor de n , sabendo que, na construção da figura, foram utilizados, exatamente, 3081 cartões.



Exame 2024, época especial

Pela construção do triângulo sabe-se que $c_n = n$, o número de cartões é igual ao número da linha do triângulo de Pascal.

$$\begin{aligned} S_n = 3081 &\Leftrightarrow \frac{c_1 + c_n}{2} \times n = 3081 \Leftrightarrow \frac{1+n}{2} \times n = 3081 \Leftrightarrow n + n^2 = 6162 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 + n - 6162 = 0 \Leftrightarrow n = -79 \vee n = 78 \Leftrightarrow n = 78 \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$

6. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

De uma progressão aritmética (u_n) , sabes-e que a soma do primeiro com o quinto termo é igual a 26 e que o nono termo é igual a 31.

Averigue se 385 é termo da progressão (u_n)

Exame 2024, 2.ª fase

Sabe-se que:

- $u_1 + u_5 = 26$
- $u_9 = 31$

Como se trata de uma progressão aritmética, então:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_5 = 26 \\ u_9 = 31 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4r = 26 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4r = 26 \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(31 - 8r) + 4r = 26 \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 62 - 16r + 4r = 26 \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -12r = 26 - 62 \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ u_1 = 31 - 8 \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ u_1 = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, a expressão geral da sucessão é $u_n = u_1 + r(n-1) \Leftrightarrow u_n = 7 + 3(n-1) \Leftrightarrow u_n = 3n + 4$

Verificar se 835 é termo da sucessão:

$$3n + 4 = 835 \Leftrightarrow n = \frac{831}{3} \Leftrightarrow n = 277 \in \mathbb{N}$$

Logo, 835 é o termo de ordem 277 da sucessão.

7. Uma orquestra está a realizar audições para novos instrumentistas.

Para se preparar para a audição de violino, a Constança praticou m dias.

Sabe-se que a Constança praticou:

- em cada dia, exceto no primeiro, sempre mais 10 minutos do que no dia anterior;
- 60 minutos no quarto dia;
- 2970 minutos no total dos m dias .

Determine o valor de m .

Exame 2024, 1.ª fase

Como em cada dia, com exceção do primeiro, a Constança praticou mais 10 minutos do que no anterior, significa que a razão da progressão aritmética é 10 ($r = 10$).

Sabe-se que:

- $u_4 = 60$
- $r = 10$
- $S_m = 2970$

Vamos determinar o termo geral da progressão aritmética:

$$u_n = u_4 + 10 \times (n - 4) \Leftrightarrow u_n = 60 + 10n - 40 \Leftrightarrow u_n = 10n + 20$$

$$\begin{aligned} S_m = 2970 &\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_m}{2} \times m = 2970 \Leftrightarrow \frac{30 + 10m + 20}{2} \times m = 2970 \Leftrightarrow m \times \frac{50 + 10m}{2} = 2970 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow m(25 + 5m) - 2970 = 0 \Leftrightarrow 5m^2 + 25m - 2970 = 0 \Leftrightarrow m = -27 \vee m = 22 \end{aligned}$$

Como $m \in \mathbb{N}$, então $m = 22$

8. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona?

(A) $(n-5)^2$ (B) $\frac{(-1)^n}{n+3}$ (C) $(-2)^n$ (D) $\frac{1}{n}$

Exame 2023, época especial

(A) $(n-5)^2$ a sequência é uma parábola com a concavidade virada para cima e com um zero em $n=5$, logo nos termos entre $n=1$ a $n=5$ a sucessão é decrescente e para todos os termos superiores a $n=5$ a sucessão é crescente. Portanto não é monótona.

(B) $\frac{(-1)^n}{n+3} = \begin{cases} \frac{1}{n+3} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{1}{n+3} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$, a sucessão oscila entre números positivos e negativos
Portanto não é monótona

(C) $(-2)^n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ é par} \\ -2^n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$, a sucessão oscila entre números positivos e negativos
Portanto não é monótona

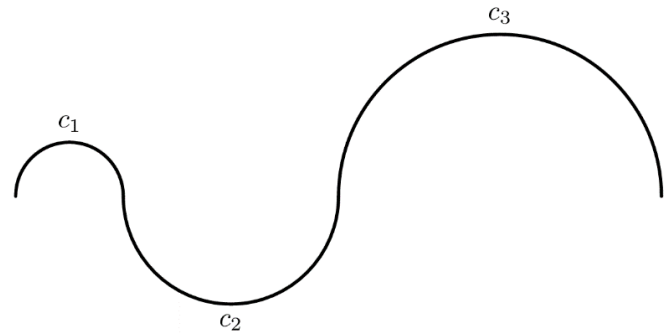
(D) $\frac{1}{n}$ $d_{n+1} - d_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{\overbrace{-1}^{<0}}{\underbrace{n(n+1)}_{>0}} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Portanto a sucessão é monótona decrescente.

OPÇÃO: D

9. Uma composição geométrica é constituída por uma sequência de 25 semicircunferências em que, à exceção da primeira, o raio de cada semicircunferência é o dobro do raio da semicircunferência anterior.

A figura ao lado representa parte dessa composição, em que c_1 , c_2 , e c_3 são as três primeiras semicircunferências, com 1 cm, 2 cm e 4 cm de raio, respetivamente.



Determine o comprimento total da linha obtida com esta composição geométrica.

Apresente o resultado em quilómetros, arredondado às unidades.

Exame 2023, época especial

Temos que a sequência dos raios das semicircunferências é: 1, 2, 4, 8, 16, ... , isto é, $2^{n-1} = r_n$

O comprimento total da linha obtida é a soma de todos os perímetros, das semicircunferências, entre 1 e 25. O perímetro de uma semicircunferência é: $c_n = \frac{2 \times r_n \times \pi}{2} = r_n \times \pi = \pi \times 2^{n-1}$, que é uma progressão geométrica de razão 2.

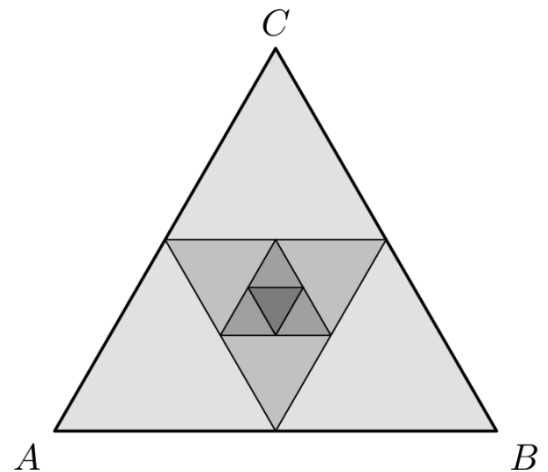
$$\text{Assim, } S_{25} = c_1 \times \frac{1-2^{25}}{1-2} = \pi \times 2^0 \times \frac{1-2^{25}}{-1} = \pi \times (2^{25} - 1) \approx 105\,414\,353.9 \text{ cm}$$

$$1054,1 \text{ km} \approx 1054 \text{ km}$$

10. Considere um triângulo equilátero, $[ABC]$, com $\overline{AB} = 1$.

Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo equilátero; unindo os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se o terceiro triângulo equilátero. Continuando a proceder deste modo, obtém-se uma sequência de n triângulos, sendo $n > 4$.

Na figura ao lado, representam-se os primeiros quatro triângulos da sequência.



Mostre que a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é menor do que 6 unidades, qualquer que seja o valor de n .

Exame 2023, 2.ª fase

$$P_{[ABC]} = 3 \times 1 = 3$$

Seja D , E e F os pontos médios de cada um dos lados do triângulo $[ABC]$ então cada um dos lados do triângulo $[DEF]$ mede $\frac{1}{2}$, logo $P_{[DEF]} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

Ou, seja o perímetro de cada figura é $\frac{1}{2}$ do perímetro da figura anterior, pelo que p_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

$$\text{A soma dos perímetros é } S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \lim S_n &= \lim \left(3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \lim \left(3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right) = \lim \left(6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \right) = \\ &= \lim \left(6 - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 6 - 6 \times \frac{1}{+\infty} = 6 - 0 = 6 \end{aligned}$$

à medida que o número de triângulos aumenta o seu perímetro tende para 6.

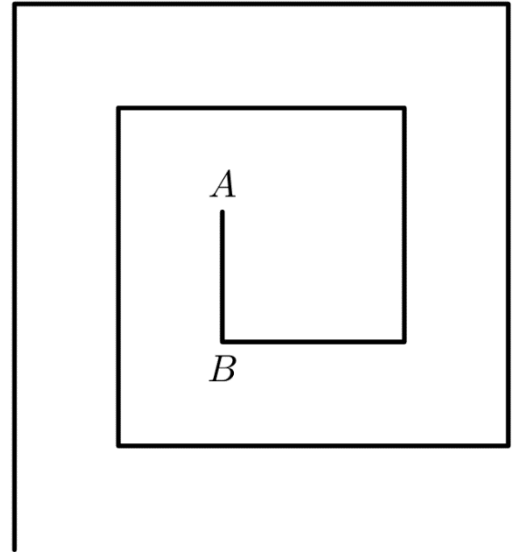
$\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 \Leftrightarrow 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) < 6, \forall n \in \mathbb{N}$, logo a soma de todos os perímetros é inferior a 6.

11. A figura ao lado representa uma linha poligonal simples que começou a ser construída a partir do segmento de reta $[AB]$. O segundo segmento de reta, com uma das extremidades em B , foi construído com mais 2 cm do que o primeiro, o terceiro segmento foi construído com mais 2 cm do que o segundo, e assim sucessivamente, tendo cada segmento de esta sempre mais 2 cm do que o anterior.

Continuando a construção da linha poligonal, do modo acima descrito, até ao 100.º segmento de reta, obtém-se uma linha poligonal com o comprimento total de 104 metros.

Determine o comprimento do segmento de reta $[AB]$.

Apresente o valor pedido em centímetros.



Exame 2023, 1.ª fase

Seja $u_1 = \overline{AB}$, sabe-se que 104 metros corresponde a 10400 cm

Temos que a razão é igual a 2, porque $u_{n+1} = u_n + 2 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 2$

Assim, como $u_{100} = u_1 + (100 - 1) \times 2 \Leftrightarrow u_{100} = u_1 + 198$, $s_{100} = 10400$ e $S_{100} = \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100$

Então,

$$\frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 = 10400 \Leftrightarrow (u_1 + u_1 + 198) \times 50 = 10400 \Leftrightarrow 2u_1 + 198 = \frac{10400}{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 + 198 = 208 \Leftrightarrow 2u_1 = 10 \Leftrightarrow u_1 = 5$$

12. De uma progressão aritmética, (v_n) , sabe-se que $v_3 = 1$ e $v_{10} = \frac{5}{4}v_9$.

Averigue, sem recorrer à calculadora, se -50 é termo da progressão (v_n)

Exame 2022, época especial

Sabe-se que:

- $v_3 = 1 \Leftrightarrow v_1 + 2r = 1 \Leftrightarrow v_1 = 1 - 2r$
- $v_9 = v_1 + 8r \Leftrightarrow v_9 = 1 - 2r + 8r \Leftrightarrow v_9 = 1 + 6r$
- $v_{10} = v_1 + 9r \Leftrightarrow v_{10} = 1 - 2r + 9r \Leftrightarrow v_{10} = 1 + 7r$

Como $v_{10} = \frac{5}{4}v_9$, então, $1 + 7r = \frac{5}{4}(1 + 6r) \Leftrightarrow 4 + 28r \Leftrightarrow 5 + 30r \Leftrightarrow -2r = 1 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$

Assim, $v_1 = 1 - 2r \Leftrightarrow v_1 = 1 + 1 \Leftrightarrow v_1 = 2$

Logo, $v_n = v_1 + r(n-1) \Leftrightarrow v_n = 2 - \frac{1}{2}(n-1) \Leftrightarrow v_n = 2 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow v_n = \frac{5}{2} - \frac{n}{2}$

Assim, $v_n = -50 \Leftrightarrow \frac{5}{2} - \frac{n}{2} = -50 \Leftrightarrow 5 - n = -100 \Leftrightarrow -n = -105 \Leftrightarrow n = 105 \in \mathbb{N}$

Portanto -50 é termo da progressão.

13. A soma dos cinco primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$ é 211.

Determine o quinto termo desta progressão.

Exame 2022, 1.ª fase

Sabemos que razão é $\frac{2}{3}$

$$\text{Então } u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \frac{2}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{243}{1} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{633}{243} = 211 \Leftrightarrow u_1 = \frac{211 \times 243}{633} \Leftrightarrow u_1 = 81$$

$$\text{Assim, } u_5 = u_1 \times r^{5-1} \Leftrightarrow u_5 = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Leftrightarrow u_5 = 16$$

14. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2n + 1$.

Determine, sem recorrer à calculadora, a soma dos primeiros duzentos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n)

Exame 2021, época especial

A ordem ímpar dos termos de uma sucessão pode ser definida por $2p-1$, $p \in \mathbb{N}$.

Assim, os termos de ordem ímpar da sucessão são: $u_p = 2(2p-1) + 1 = 4p - 2 + 1 = 4p - 1$.

Logo, é uma progressão aritmética de razão 4, pelo que a soma dos primeiros 200 termos é:

$$S_{200} = \frac{u_1 + u_{200}}{2} \times 200 = \frac{4 - 1 + 800 - 1}{2} \times 200 = 802 \times 100 = 80\,200$$

15. Seja (u_n) uma progressão aritmética.

Sabe-se que, relativamente a (u_n) , a soma do sexto termo com o vigésimo é igual a -5 e que o décimo nono termo é igual ao quádruplo do sétimo termo.

Determine a soma dos dezasseis primeiros termos desta progressão.

Exame 2021, 2.ª fase

Sabe-se que $u_6 = u_1 + 5r$, $u_7 = u_1 + 6r$, $u_{19} = u_1 + 18r$ e que $u_{20} = u_1 + 19r$.

Pretende-se determinar $S_{16} = \frac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16$

- $u_6 + u_{20} = -5 \Leftrightarrow u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \Leftrightarrow 2u_1 + 24r = -5 \Leftrightarrow u_1 = -\frac{24r+5}{2}$
- $u_{19} = 4u_7 \Leftrightarrow u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \Leftrightarrow u_1 + 18r = 4u_1 + 24r \Leftrightarrow -3u_1 = 6r \Leftrightarrow u_1 = -2r$

Assim, $-\frac{24r+5}{2} = -2r \Leftrightarrow -24r - 5 = -4r \Leftrightarrow -20r = 5 \Leftrightarrow r = -\frac{5}{20} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{4}$

$u_1 = -2r = -2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ e $u_{16} = u_1 + 15r = \frac{1}{2} + 15\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{13}{4}$

Portanto, $S_{16} = \frac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{13}{4}}{2} \times 16 = -22$

16. Seja (u_n) uma progressão geométrica.

Sabe-se que $v_5 = 4$ e que $v_8 = 108$

Qual é o valor de v_6 ?

- (A) 12 (B) 24 (C) 48 (D) 60

Exame 2021, 1.ª fase

v_n é uma progressão geométrica, logo de $v_n = v_p \times r^{n-p}$ vem que $v_8 = v_5 \times r^{8-5} \Leftrightarrow v_8 = v_5 \times r^3$

Assim, de acordo com os dados do enunciado, tem-se que: $108 = 4 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3$

Portanto, $v_6 = v_5 \times r = 4 \times 3 = 12$

OPÇÃO: A

17. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Determine sem recorrer à calculadora, quantos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n)

pertencem ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$

Exame 2021, 1.ª fase

A subsucessão dos termos de ordem ímpar é dada pela expressão $2 + \frac{1}{n}$

Pretende-se calcular quantos termos de ordem ímpar verificam a condição $\frac{81}{41} \leq u_n \leq \frac{67}{33}$

Assim, $\frac{83}{41} \leq u_n \leq \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{83}{41} \leq 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{1}{41} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \Leftrightarrow 33 \leq n \leq 41$

Para n ímpar

Logo, os termos de ordem ímpar são 33, 35, 37, 39 e 41.

Portanto, existem 5 termos da sucessão que pertencem ao intervalo $\left[\frac{81}{41}, \frac{67}{33}\right]$

18. Considera uma progressão geométrica não monótona (u_n)

Sabe-se que $u_3 = \frac{1}{12}$ e que $u_{18} = 4u_{20}$

Determina uma expressão do termo geral de u_n

Apresenta essa expressão na forma $a \times b^n$, em que a e b são números reais.

Exame 2020, época especial

Sabe-se que $u_3 = u_1 \times r^2$, $u_{18} = u_1 \times r^{17}$ e $u_{20} = u_1 \times r^{19}$

Temos:

- $u_3 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow u_1 \times r^2 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{12r^2}$
- $u_{18} = 4u_{20} \Leftrightarrow u_1 \times r^{17} = 4(u_1 \times r^{19})$

Assim, $u_1 \times r^{17} = 4u_1 \times r^{19} \Leftrightarrow \frac{1}{12r^2} \times r^{17} = \frac{4}{12r^2} \times r^{19} \Leftrightarrow \frac{1}{12} \times r^{15} = \frac{1}{3} \times r^{17} \Leftrightarrow \frac{r^{15}}{r^{17}} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow r^{-2} = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow r = \pm \frac{1}{2}$, como a sucessão é não monótona, $r = -\frac{1}{2}$

$$u_1 = \frac{1}{12r^2} = \frac{1}{12\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{12\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{3}$$

Portanto $u_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

19. De uma progressão aritmética u_n sabe-se que o sétimo termo geral é igual ao dobro do segundo e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 57
 Sabe-se ainda que 500 é termo da sucessão u_n
 Determina a ordem deste termo.

Exame 2020, 2ª fase

Seja r a razão da progressão aritmética.

Sabe-se que, $u_2 = u_1 + r$, $u_7 = u_1 + 6r$ e $u_{12} = u_1 + 11r$

Como $u_7 = 2u_2 \Leftrightarrow u_1 + 6r = 2(u_1 + r) \Leftrightarrow u_1 + 6r = 2u_1 + 2r \Leftrightarrow u_1 = 4r$

Temos que $S_{12} = 57 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = 57 \Leftrightarrow (4r + 4r + 11r) \times 6 = 57 \Leftrightarrow 114r = 57 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$

Logo, $u_n = u_1 + r(n-1) \Leftrightarrow u_n = 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) \Leftrightarrow u_n = 2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \frac{n+3}{2}$

$u_n = 500 \Leftrightarrow \frac{n+3}{2} = 500 \Leftrightarrow n+3 = 100 \Leftrightarrow n = 997$

Pelo que 500 é o termo de ordem 997 da sucessão

20. Considera a sucessão u_n de termo geral $u_n = \frac{8n-4}{n+1}$

Estuda a sucessão quanto à monotonia.

Exame 2020, 1ª fase

$$u_{n+1} - u_n = \frac{8(n+1)-4}{n+1+1} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{8n+4}{n+2} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{8n^2 + 8n + 4n + 4 - 8n^2 + 4n - 16n + 8}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{\overset{>0}{12}}{\underbrace{(n+2)(n+1)}_{>0, n \in \mathbb{N}}} > 0.$$

Portanto, como $u_{n+1} - u_n > 0$, a sucessão é monótona crescente.

21. Considera a sucessão u_n de termo geral $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

Determina a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão u_n são maiores do que $-0,01$

Exame 2019, época especial

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -\frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Quando n é ímpar todos os termos são positivos, pelo que todos os termos de ordem ímpar são maiores do que $-0,01$

Quando n é par:

$$u_n > -0,01 \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n+1 > 100 \Leftrightarrow n > 99$$

Assim, todos os termos da sucessão são maiores do que $-0,01$ para os termos de ordem par superiores a 99 e também para todos os termos de ordem ímpar, portanto a ordem a partir da qual todos os termos são superiores a $-0,01$ é 99.

22. Sejam a e b dois números reais diferentes de zero

Sabe-se que $2, a$ e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica

Sabe-se ainda que $a - 2, b$ e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética

Determina a e b

Exame 2019, 2ª fase

Como $2, a$ e b são termos consecutivos de uma progressão geométrica, tem-se que $\frac{a}{2} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 = 2b$

Sabe-se ainda que $a - 2, b$ e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, tem-se que,

$$b - (a - 2) = 2 - b \Leftrightarrow b - a + 2 = 2 - b \Leftrightarrow -a = -2b \Leftrightarrow a = 2b$$

$$\begin{cases} a^2 = 2b \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2b)^2 = 2b \\ \text{-----} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 = 2b \\ \text{-----} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{4} \\ \text{----} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

Portanto, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$

23. Seja r um número real maior do que 1 .

Sabe-se que r é a razão de uma progressão geométrica de termos positivos.

Sabe-se ainda que, de dois termos consecutivos dessa progressão, a sua soma é igual a 12 e a diferença entre o maior e o menor é igual a 3 .

Determina o valor de r

Exame 2019, 1ª fase

Seja n o menor dos dois termos e m o maior dos dois termos.

$$\text{Assim, } r = \frac{m}{n} \Leftrightarrow n = rm$$

A soma dos termos é 12, logo $n+m=12 \Leftrightarrow rm+m=12 \Leftrightarrow rm=12-m$

A diferença dos termos é 3, logo $n-m=3 \Leftrightarrow rm-m=3 \Leftrightarrow rm=3+m$

$$\text{Então, } 12-m=3+m \Leftrightarrow 2m=9 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$$

$$\text{Portanto, } rm=3+m \Leftrightarrow \frac{9}{2}r = 3 + \frac{9}{2} \Leftrightarrow 9r = 6 + 9 \Leftrightarrow r = \frac{15}{9} \Leftrightarrow r = \frac{5}{3}$$

24. De uma progressão aritmética u_n sabe-se que o terceiro termo é igual a 4 e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 174.

Averigua se 5371 é termo da sucessão u_n

Exame 2018, 2ª fase

$$u_{12} = u_1 + 11r$$

$$u_3 = 4 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 4 \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r$$

Como a soma dos 12 primeiros termos é 174

$$\begin{aligned} S_{12} = 174 &\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = 174 \Leftrightarrow (u_1 + u_1 + 11r) \times 6 = 174 \Leftrightarrow 2u_1 + 11r = \frac{174}{6} \Leftrightarrow 2(4 - 2r) + 11r = 29 \\ &\Leftrightarrow 8 - 4r + 11r = 29 \Leftrightarrow 7r = 21 \Leftrightarrow r = 3 \end{aligned}$$

$$u_1 = 4 - 2 \times 3 = -2$$

$$u_n = u_1 + r(n-1) = -2 + 3(n-1) = -2 + 3n - 3 \Leftrightarrow 3n - 5$$

$$3n - 5 = 5371 \Leftrightarrow 3n = 5376 \Leftrightarrow n = \frac{5376}{3} \Leftrightarrow n = 1792$$

Como $1792 \in \mathbb{N}$ então 5376 é termo da sucessão

25. Seja a um número real.

Sabe-se que a , $a + 6$ e $a + 18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Relativamente a essa progressão geométrica, sabe-se ainda que a soma dos sete primeiros termos é igual a 381.

Determina o primeiro termo dessa progressão.

Exame 2018, 1ª fase

Como a sucessão é uma progressão geométrica, então:

$$\frac{a+18}{a+6} = r \quad \text{e} \quad \frac{a+6}{a} = r$$

$$\text{Logo, } \frac{a+18}{a+6} = \frac{a+6}{a} \Leftrightarrow a(a+18) = (a+6)^2 \quad \wedge \quad (a \neq -6 \wedge a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a} + 18a = \cancel{a} + 12a + 36$$

$$\Leftrightarrow 6a = 36$$

$$\Leftrightarrow a = 6$$

$$\text{Como, } r = \frac{a+6}{a}, \text{ então, } r = \frac{6+6}{6} = 2$$

$$S_7 = 381 \Leftrightarrow u_1 \frac{1-r^7}{1-r} = 381 \Leftrightarrow u_1 \frac{1-2^7}{1-2} = 381 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{-127}{-1} = 381$$

$$\Leftrightarrow 127u_1 = 381 \Leftrightarrow u_1 = \frac{381}{127} \Leftrightarrow u_1 = 3$$

26. Seja u_n a sucessão definida por $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$

Qual das afirmações é verdadeira?

(A) A sucessão u_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

(B) A sucessão u_n é uma progressão geométrica de razão 2

(C) A sucessão u_n é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$

(D) A sucessão u_n é uma progressão aritmética de razão 2

Exame 2017, 2ª fase

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} = \left((2)^{-1}\right)^{1-n} = 2^{n-1}$$

OPÇÃO: B

27. De uma progressão geométrica u_n , monótona crescente, sabe-se que $u_4 = 32$ e que $u_8 = 8192$

Qual é o quinto termo da sucessão u_n ?

- (A) 64 (B) 128 (C) 256 (D) 512

Exame 2016, 2ª fase

Progressão geométrica: $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

$$u_4 = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^{4-1} = 32 \Leftrightarrow u_1 = \frac{32}{r^3}$$

$$u_8 = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^{8-1} = 8192 \Leftrightarrow u_1 = \frac{8192}{r^7}$$

$$\text{Assim, } \frac{32}{r^3} = \frac{8192}{r^7} \Leftrightarrow \frac{r^7}{r^3} = \frac{8192}{32} \Leftrightarrow r^4 = 256 \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{256} \Leftrightarrow r = 4$$

Logo o 5.º termo da sucessão é $u_5 = u_4 \times r^{5-4} = 32 \times 4 = 128$

OPÇÃO: B

28. De uma progressão geométrica a_n , sabe-se que o terceiro termo é igual a $\frac{1}{4}$ e que o sexto termo é igual a 2

Qual é o valor do vigésimo termo?

- (A) 8192 (B) 16384 (C) 32768 (D) 65536

Exame 2015, época especial

Progressão geométrica: $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$$a_3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^{3-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{4r^2} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{4r^2}$$

$$a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^{6-1} = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5}$$

$$\text{Assim, } \frac{1}{4r^2} = \frac{2}{r^5} \Leftrightarrow \frac{r^5}{r^2} = 8 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow r = 2$$

Logo o 20.º termo da sucessão é $a_{20} = a_1 \times r^{20-1} = \frac{1}{4r^2} \times r^{19} = \frac{1}{4 \times 2^2} \times 2^{19} = 32768$

OPÇÃO: C

29. Seja a um número real.

Considera a sucessão u_n definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3u_n + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

- (A) $6a + 4$ (B) $9a - 4$ (C) $6a - 4$ (D) $9a + 4$

Exame 2015, 1ª fase

$$u_1 = a$$

$$u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$$

$$u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 6 + 2 = 9a - 4$$

OPÇÃO: B

30. Seja u_n a sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_2 = u_{n-1} + 2n \quad \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Seja w_n a sucessão de termo geral $w_n = 5n - 13$

Qual é o valor de n para o qual se tem $w_n = u_2$

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

Teste Intermédio 11º ano, maio de 2011

$$u_2 = u_1 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$$

$$w_n = u_2 \Leftrightarrow 5n - 13 = 7 \Leftrightarrow 5n = 20 \Leftrightarrow n = 4$$

OPÇÃO: B